Combinatoire

I) Principes élémentaires de dénombrement

Exercice 1 Un chaîne de n-bits est un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où chaque x_i vaut 0 ou 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, combien existe-t-il de chaînes à n-bits qui contiennent au moins un zéro ?
2. Combien existe-t-il de chaînes à n-bits palindromiques, comme $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$?
3. Pour $n \geq 6$, combien existe-t-il de chaînes à n bits qui commencent ou terminent par trois zéros d'affilés ?

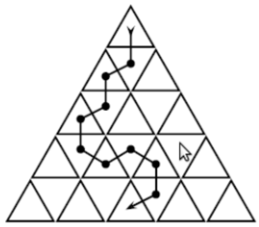
Exercice 2 Combien existe-t-il de façons de choisir deux carreaux d'un échiquier 8×8 qui ne sont ni sur la même ligne, ni sur la même colonne ?

Exercice 3
1. Combien y a-t-il de façons de répartir 6 personnes le long d'une table avec 6 sièges ?
2. Quel est le nombre de permutations de la liste $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ qui contiennent les chiffres $2, 5, 4$ dans cet ordre en positions adjacentes ?

Exercice 4 10 personnes choisissent chacune un entier entre 1 et 30. Combien y a-t-il de possibilités où au moins deux personnes ont fait le même choix ?

Exercice 5 Chaque matin, Bob accroche des portes clefs à son sac.
Il dispose de 9 porte clefs différents.

1. Combien de façons a-t-il de choisir au moins un porte clefs à mettre sur son sac ?
2. Combien de façons a-t-il de choisir un nombre impair de porte clefs ?
   On pourra le comparer au nombre de façons d'en choisir un nombre pair.
3. et si Bob avait 10 porte-clefs ?



Exercice 6 Un triangle équilatéral de côté n est divisé en triangles unitaires, comme ci-contre. On s'intéresse au nombre $f(n)$ de chemins du petit triangle du haut au triangle au milieu de la dernière rangée, en se déplaçant à chaque étape d'un triangle à un triangle voisin, sans jamais revenir sur nos pas, ni remonter d'une rangée. Déterminer $f(2025)$.

II) Introduction aux coefficients binomiaux

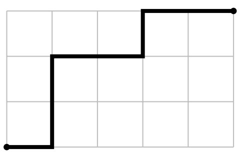
Définition Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\binom{n}{k}$ (lire «k parmi n») le nombre de façons de choisir k objets parmi n. C'est aussi le nombre de façons de choisir k entiers distincts entre 1 et n.

Exercice 7 Pour $n \geq 3$, que valent $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{0}$, et $\binom{n}{3}$?

Exercice 8 En considérant le nombre de façons de former une équipe de k personnes, dont un capitaine, à partir d'un groupe de n personnes, établir la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 9 Pour $p \leq n$, montrer que $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$.

Exercice 10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$.



Exercice 11 Un mot est un anagramme d'un autre s'il s'obtient en réordonnant les lettres. Exprimer à l'aide de coefficients binomiaux le nombre d'anagrammes d'ABRACADABRA.

Exercice 12 Combien y a-t-il de façons de se rendre du point de coordonnées $(0, 0)$ au point de coordonnées $(10, 10)$ par pas d'une unité ou bien vers le haut, ou bien vers la droite ?

Exercice 13
1. Combien existe-t-il de triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que $a + b + c = 10$?
2. Et si a, b, c peuvent être nuls ?

Exercice 14 Combien y a-t-il de façons différentes de distribuer 10 friandises (identiques) à 7 chiens ?

Exercice 15 Quel est le nombre de façons d'écrire un entier n comme une somme d'entiers non nuls, en prenant en compte l'ordre. Par exemple, pour $n = 4$, les façons sont $4 = 1 + 3 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 1 + 2 = 1 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Exercice 16 ★ On note $p(n)$ le nombre de façons d'écrire n comme somme d'entiers non nuls, mais sans prendre en compte l'ordre. Montrer que pour $n \geq 1$, $p(n) \leq 2^n$ et que pour $n \geq 2$, $p(n) \geq 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$, où $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ est la partie entière de $\sqrt{n}$.

III) Principe des tiroirs

Propriété Si on range au moins $n + 1$ chaussettes dans n tiroirs, au moins un des tiroirs contient au moins deux chaussettes.

Exercice 17 Montrer que parmi 10 nombres $x_1, \ldots, x_{10}$ dans $[0, 1]$, on peut en trouver deux tels que $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{9}$ (avec $i \neq j$).

Exercice 18 On considère une réunion de n individus. Montrer qu'il existe deux individus qui connaissent exactement le même nombre de personnes dans cette réunion. On suppose que si A connait B, B connait A.

Exercice 19 On considère un carré de côté 1. Montrer que si l'on place 5 points dans ce carré, on peut en trouver deux dont la distance est au plus de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 20 Parmi $n + 1$ entiers $x_0, \ldots, x_n$, montrer qu'il en existe deux dont la différence est divisible par n.

Théorème d'approximation de Dirichlet

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x et $\{x\}$ la partie fractionnaire de x. Par exemple $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$ et $\{3,14\} = 0,14$.

Exercice 21 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. En considérant les $\{\alpha k\}$ pour $k \in \{0, 1, \dots, Q\}$, montrer qu'il existe des entiers p, q, avec $1 \leq q \leq Q$ tels que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qQ}$.

Exercice 22 ★ Co-approximation rationnelle Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des entiers $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ et q tels que $\left|q\alpha_1 - p_1\right| \leq \varepsilon$ et $\left|q\alpha_2 - p_2\right| \leq \varepsilon$.

IV) Pavages, coloriages

Exercice 23 On retire à un échiquier 8×8 deux cases dans deux coins diagonalement opposés. Est-il possible de paver le reste de l'échiquier avec des dominos 1×2 ?

Exercice 24 On dispose de tétrominos en forme de . Pour quelles valeurs de n est-il possible de paver un échiquier $n \times n$?

Exercice 25 Montrer qu'un rectangle $n \times m$ peut être pavé par des dominos 1×4 et 4×1 si et seulement si 4 divise n ou m.

Coloriages

Exercice 26 On colorie le plan $\mathbb{R}^2$ avec deux couleurs.

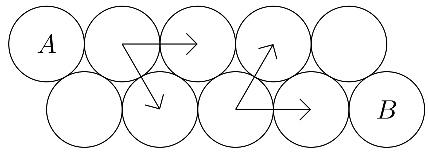
1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de la même couleur à distance x l'un de l'autre.
2. Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de cette couleur à distance x l'un de l'autre.

Exercice 27 On considère 6 points du plan et on relie chaque paire de points par un segment. On colorie chaque segment en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe forcément un triangle monochrome.

Exercice 28 On colorie le plan avec deux couleurs. Montrer qu'on peut trouver un triangle équilatéral dont les trois sommets sont de même couleur et de côté de longueur 1 ou $\sqrt{3}$.

Suite de Fibonacci

Exercice 29 Une grenouille part du point A et souhaite aller en B. Elle ne peut sauter que d'un cercle à un cercle adjacent, et ses sauts doivent toujours la déplacer vers la droite. De combien de chemins possibles dispose-t-elle pour aller de A à B ?
Commencer par compter le nombres de chemins allant de A à des cercles plus proches.



Exercice 30 On note F_n le nombre de façons de paver un rectange $1 \times n$ par des carrés 1×1 et des dominos 1×2.

1. On prend la convention que $F_0 = 1$. Déterminer les 8 premiers termes de la suite.
2. Justifier que $\forall n \geq 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Exercice 31 Donner des démonstrations combinatoires des identités suivantes.

1. $F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$
2. $F_0 + F_2 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1}$
3. $\forall p, q \geq 1,\ F_p F_q + F_{p-1} F_{q-1} = F_{p+q}$
4. $F_0^2 + F_1^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
5. $\forall n \geq 2,\ 3F_n = F_{n+2} + F_{n-2}$
6. $\forall n \geq 1,\ F_n^2 = F_{n+1} F_{n-1} + (-1)^n$

V) Jeux

Exemple Une pile contient n bâtonnets. Deux joueurs retirent, tour à tour, 1, 2 ou 3 bâtonnets de la pile. Le joueur qui ne peut plus jouer perd. Décrire les positions et stratégies gagnantes du premier joueur.

Exercice 32 Jeu de Wythoff On considère deux piles de bâtonnets. Tour à tour, chaque joueur choisit de retirer un nombre arbitraire de bâtonnets d'une des piles, ou le même nombre des deux piles. Le joueur qui ne peut plus jouer perd. Décrire les positions gagnantes du premier joueur.

Exercice 33 Deux joueurs posent tour à tour des pièces identiques de rayon 1 à l'intérieur d'un disque de rayon 10. Les pièces ne peuvent pas se superposer, et le premier joueur à ne pas pouvoir jouer perd. Trouver une stratégie gagnante pour l'un des joueurs.

Exercice 34 Alice et Bob jouent aux échecs, mais chaque joueur joue deux coups d'affilée. Montrer que les blancs ont une stratégie qui garantie au moins un match nul. **Ind** : *Raisonner par l'absurde.*

Exercice 35 On part d'une tablette de chocolat rectangulaire $n \times m$. Deux joueurs jouent en alternant. À chaque étape, le joueur choisit un carreau restant, et mange ce carreau ainsi que tous les carreaux en bas à droite du carreau. Le joueur qui mange le carreau en haut à gauche perd.
Montrer que si $(n, m) \neq (1, 1)$, le premier joueur a une stratégie gagnante.

Exercice 36 Alice et Bob placent, tour à tour, un signe $+$ ou un signe $-$ devant un des nombres $1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ 19\ 20$. Quand les 20 signes sont placés, le joueur B gagne la valeur absolue de la somme. Déterminer les stratégies optimales de chaque joueur. Quel est le gain de B si les joueurs jouent de manière optimale.

Exercice 37 Alice et Bob choisissent, tour à tour, un coefficient manquant du polynôme $x^{10} + \_x^9 + \_x^8 + \cdots + \_x^2 + \_x + 1$ (ils peuvent choisir un réel arbitraire). Le joueur A gagne si le polynôme final n'a pas de racine. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 38 Un roi est initialement placé en haut à gauche d'un échiquier $m \times n$. Alice et Bob déplacent le roi, chacun leur tour, sans que le roi ne puisse repasser par une case qu'il a occupé par le passé. Le joueur qui ne peut pas jouer perd. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?