Épreuve d'Olympiade blanche

Les sujets d'olympiade sont constitués de deux exercices nationaux, à traiter en deux heures, puis de deux exercices académiques, à traiter en deux autres heures, par équipe de 2 à 4, à rendre en une seule copie par équipe.
Dans le présent sujet :

- Traiter les exercices I et II pendant les deux premières heures.
- Traiter les exercices III et IV par équipes (ou individuellement), en 1h30 à partir de 10h30.
- Ne pas traiter le V. Il peut remplacer
  - ▷ Le II) 1) et 3) si vous n'avez pas fait les polynômes du second degré.
  - ▷ Le I) 2) et 3) si vous n'avez pas fait les suites.

I) Tous distinctes [Exercice national 2024]

On fixe un entier $n \geq 1$.
On conviendra d'écrire tout ensemble A à n éléments distincts comme $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ en ordonnant toujours $a_1, a_2, \cdots, a_n$ si bien que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.
Étant donné un tel ensemble, on note $S(A)$ la somme de ses éléments : $S(A) = a_1 + \cdots + a_n$. En particulier, lorsque $n = 1$ et donc $A = \{a_1\}$ est un singleton, $S(A) = a_1$.
On dit que l'ensemble A est à sommes toutes distinctes (en abrégé que A est STD) quand, pour toutes parties non vides distinctes Y et Z de A, $S(Y) \neq S(Z)$. Cela revient à demander aux $2^n - 1$ sommes que l'on peut former avec des éléments de A d'être toutes distinctes.
Par exemple $A = \{1, 2, 5\}$ est STD parce que les nombres $1, 2, 5, 1+2 = 3, 2+5 = 7, 1+5 = 6, 1+2+5 = 8$ sont tous distincts.
En revanche, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ n'est pas STD parce qu'en prenant $Y = \{2, 4, 7\}$ et $Z = \{6, 7\}$, on a $S(Y) = 2+4+7 = 13 = S(Z)$, bien que $Y \neq Z$.

1) Exemples et contre-exemples simples

1. Expliquer pourquoi le nombre de sommes à envisager pour étudier le caractère STD de A vaut $2^n - 1$.
2. Montrer que l'ensemble $\{1, 3, 5\}$ est STD mais que l'ensemble $\{4, 6, 7, 9\}$ ne l'est pas.
3. Quel(s) ensemble(s) A contenant 0 est (sont) STD ?
4. Soient A et B deux ensembles non vides et finis de réels distincts, avec $A \subset B$ (c'est-à-dire que A est un sous-ensemble de B). a. Si B est STD, justifier que A l'est aussi. b. L'ensemble B peut-il être STD si A ne l'est pas ?
5. Soit A un ensemble non vide et fini de réels distincts. On suppose que A n'est constitué que de nombres entiers naturels non nuls et qu'il est STD. Justifier que $A \cup \{\frac{1}{2}\}$ puis que $A \cup \{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\}$ sont aussi STD.

2) Construction d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_1 + \cdots + u_n + 1$

6. Vérifier que $u_2 = 2$ et $u_3 = 4$. Calculer u_5.
7. Rédiger sur votre copie un programme en langage Python qui renverrait u_{100} (qu'on ne calculera pas).
8. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
9. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ est STD.
10. Montrer que (u_n) est en fait une suite géométrique que l'on déterminera.
    Une suite géométrique est une suite de la forme $u_n = c \cdot d^n$, pour $c, d \in \mathbb{R}$.

3) Une inégalité sur les suites STD

Une suite (u_n) est dite STD lorsqu'elle est strictement croissante, qu'elle est composée d'entiers strictement positifs, et que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \cdots, u_n\}$ est STD. Par exemple, la suite étudiée en partie **2)** est une suite STD.

11. Soit (u_n) une suite STD quelconque. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\quad u_1 + \cdots + u_n \geq 2^n - 1$. b. En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a $\quad u_n \geq \dfrac{2^n}{n}$.

II) Une descente infinie [Exercice national 2023]

Dans tout l'exercice, α désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.
On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$.

$$(E) : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbb{Z}^3$ solution de (E) est $(0, 0, 0)$.

1) Racines d'un polynôme

Soient b et c deux réels. On considère la fonction polynôme P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $P(x) = x^2 + bx + c$. Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé racine de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes, r_1 et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.
2. On suppose ici $b \leq 0$ et $c \geq 0$ Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

2) Transformations élémentaires d'une solution

3. **a.** On suppose que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de l'équation (E). Montrer que $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).
   b. En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de $(0, 0, 0)$ solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de $(0, 0, 0)$ solution de l'équation (E).
4. Si le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2, x_1, x_3) ?
5. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^3$ différente du triplet $(0, 0, 0)$, alors elle admet une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbb{N}^3$ différente du triplet $(0, 0, 0)$ et telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

3) La descente

On suppose donc dans cette partie qu'il existe un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de $(0, 0, 0)$ solution de (E) et tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. On fixe un tel triplet.

6. Démontrer que $x_1 > 0$.
7. On définit la fonction Q de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$. a. Soit y un réel. Montrer que (x_1, x_2, y) est solution de (E) si, et seulement si, y est une racine de Q. b. Indiquer une première racine de Q à partir des données de l'énoncé. c. Vérifier que $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ et en déduire que $Q(x_2) < 0$. d. Quel est le signe de $Q(0)$? e. Démontrer que Q a deux racines distinctes : celle donnée précédemment et une autre notée y ; ranger dans l'ordre croissant les nombres 0, x_2 et x_3 et y et justifier qu'ils sont tous distincts. f. Montrer que (x_1, x_2, y) est un triplet d'entiers naturels solution de l'équation (E).
8. Que donne le raisonnement de la question **7.** en remplaçant le triplet solution (x_1, x_2, x_3) par le triplet constitué de x_1, x_2, y rangés dans l'ordre croissant ?
9. Expliquer comment aboutir à une absurdité et conclure quant aux triplets d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
10. Démontrer le résultat suivant :
    « Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > n \geq 2$. L'équation $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha x_1 \ldots x_n$ d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'admet pas de n-uplet d'entiers relatifs solution autre que $(0, 0, \ldots, 0)$. »

III) Partage équitable [Exercice académique 2008]

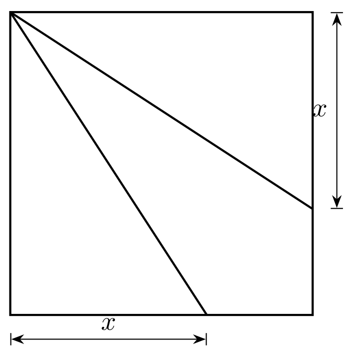


Figure 1

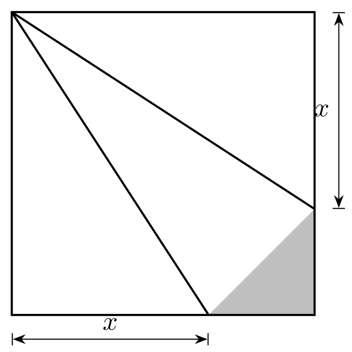


Figure 2

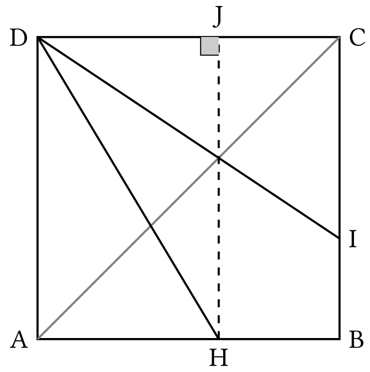


Figure 3

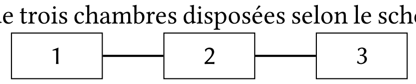
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma de la Figure 1.
   Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?
2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire grisée dans la Figure 2. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.
   Peuvent-elles avoir la même aire ?
3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement la construction de la question **2.** (Figure 3), il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB) (Figure 3).
   Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes. Qu'en est-il ?

IV) Un compte de fées [Exercice académique 2017]

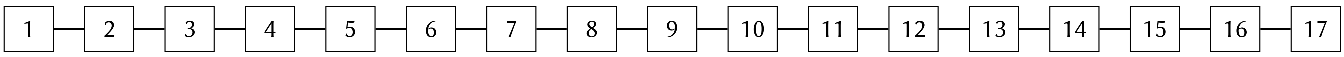
La princesse Clara veut épouser le fils du roi Pierre le Magnifique. Le roi s'oppose au mariage. Il enferme son fils dans une chambre de son château et propose à la princesse le marché suivant :

« Tu n'entreras pas dans le château mais, à partir du premier jour du mois, chaque jour tu pourras faire ouvrir les fenêtres d'une chambre de ton choix. Si le prince mon fils est dans cette chambre, vous vous marierez. Sinon, les fenêtres se refermeront, et tu devras attendre le lendemain pour recommencer. Entretemps, j'aurai fait déplacer mon fils dans une chambre voisine. Si, à la fin du mois, tu ne l'as pas trouvé, tu devras partir immédiatement sans te retourner ».

1. Si le château ne possède que trois chambres disposées selon le schéma ci-dessous, prouver que la princesse peut trouver le prince en deux jours au plus.



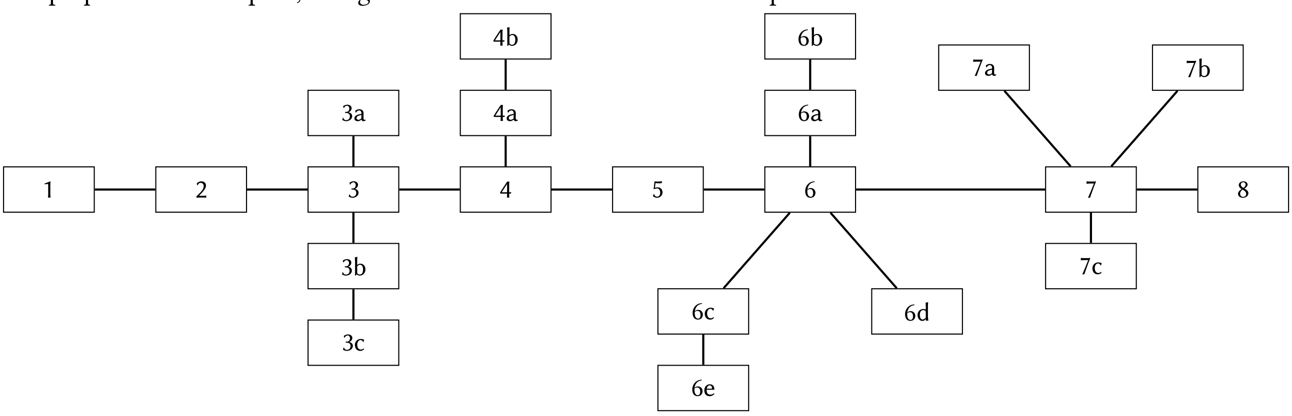
2. Le château possède en réalité 17 chambres disposées selon le schéma



   a. Dans cette question uniquement, on suppose que Clara sait que le prince est initialement dans une chambre de numéro pair. Donner une liste de 15 essais qui permettront à Clara d'atteindre son objectif quels que soient les déplacements ordonnés par le roi.

   b. Prouver que si la princesse a tout le mois de juin pour trouver le prince, ils se marieront.

3. Dans la même configuration (17 chambres), Clara a décidé à l'avance d'une suite de choix de chambres. Les espions du roi ont connaissance de cette suite, et en informent le roi. a. Prouver que si, malgré tout, Clara trouve le prince, elle aura fait ouvrir au moins deux fois les fenêtres de chaque chambre autre que les extrêmes 1 et 17. b. Prouver que le roi peut empêcher le mariage si l'épreuve débute le 1er février.
4. N'ayant pas pensé à la solution précédente, le roi imagine d'enfermer son fils dans un château plus vaste, et dont le plan est plus compliqué. En voici le plan, où figurent les 21 chambres et les couloirs permettant les communications :



   Y a-t-il une stratégie permettant à Clara de trouver son prince, malgré les espions du roi et quel que soit le mois qu'il aura choisi ?

V) Sommes de diviseurs [Exercice national 2021]

On rappelle qu'on nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n.

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? de 101 ? de 361 ? de 2 021 ?
2. Quelle est la somme des diviseurs de 6 ? de 101 ? de 361 ? de 2 021 ?

À tout nombre entier naturel non nul n, on associe le nombre $N(n)$ et la somme $S(n)$ de ses diviseurs.

3. Pour chacun des nombres $6, 101, 361, 2\,021$ vérifier l'inégalité $\quad 2S(n) \leq (n+1)N(n)$
4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus. a. Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{N(n)-1} + 1$. b. Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que $\quad a + b < ab + 1$ c. En déduire, pour des nombres d et q tels que dq = n, l'inégalité $\quad d + q \leq n + 1$. d. En déduire finalement que l'inégalité $\quad 2S(n) \leq (n+1)N(n) \quad$ est réalisée pour tout entier naturel n non nul.
5. **a.** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité $\quad 2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*) \quad$ n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n, l'égalité $d + q = n + 1$ est réalisée.

   b. En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité $(*)$.

   c. La réciproque est-elle vraie ?