Inégalités & Optimisation

I) Inégalités

1) Inégalité arithmético-géométrique

Exercice 1 Montrer que pour $a, b \geq 0$, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. En déduire que $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$.

Exercice 2 Soient $a, b > 0$.

1. Étudier le minimum de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{a+b+x}{\sqrt[3]{x}}$.
2. En déduire pour tout $x > 0$, $\sqrt[3]{abx} \leq \frac{a+b+x}{3}$.

Application

Exercice 3 Déterminer la valeur maximale de $\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$, pour $x, y, z > 0$.

Exercice 4 Montrer que pour $x > 0$, on a $1 + x^{2n} \geq \frac{(2x)^{2n-1}}{(1+x)^{2n-2}}$.

Version à n termes

Théorème – IAG. Soient $a_1, \dots, a_n \geq 0$. On a

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Exercice 5 Inégalité harmonico-géométrique Montrer que, pour $a_1, \dots, a_n > 0$,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

2) Deux problèmes d'optimisation

Exercice 6 Déterminer le produit maximal d'entiers naturels dont la somme fait 2024.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur maximale de la somme $x_1 + \cdots + x_n$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des entiers positifs qui vérifient la condition $x_1^3 + \cdots + x_n^3 \leq 7n$.

3) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 8 Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des nombres réels. On suppose que les y_i sont non tous nuls. On considère la fonction

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2x_iy_it + y_i^2t^2\right) = \left(x_1^2 - 2x_1y_1t + y_1^2t^2\right) + \cdots + \left(x_n^2 - 2x_ny_nt + y_n^2t^2\right)$$

.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.
2. En remarquant que f est un polynôme du second degré, déduire de la question précédente que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

3. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 9 Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n}$.

Exercice 10 Soit P un polynôme à coefficients réels strictement positifs. Montrer que si $P(1) \geq 1$, alors $\forall x > 0,\ P(\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{P(x)}$.

4) Réordonnement

Exercice 11 Inégalité du réordonnement On considère $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ des réels. On considère σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. L'inégalité du réordonnement est l'inégalité

$$a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \cdots + a_nb_{\sigma(n)} \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

1. Vérifier l'inégalité du réordonnement pour $n = 2$.
2. En considérant une permutation σ maximisant la somme $\sum_i a_ib_{\sigma(i)}$, démontrer l'inégalité du réordonnement. Pour simplifier l'argument, on pourra supposer que les suites sont strictement croissantes.
3. Montrer l'inégalité de Tcheybchev :

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

   On pourra développer le produit de droite, et introduire les sommes

   $S_1 = a_1b_1 + \dots a_nb_n,\ S_2 = a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1,\ S_3 = a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2,\ \dots$ et $S_n = a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}$

5) «Petits poids», d'après CG 2015

Pour $n \geq 2$, on appelle poids d'un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la plus grande des valeurs $|x_1|, |x_1+x_2|, \ldots, |x_1+x_2+\cdots+x_n|$. Étant donné $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on cherche à minimiser le poids en réordonnant les éléments. On note I le poids minimal possible.

On considère le procédé d'optimisation suivant :

- Parmi $x_1, \ldots, x_n$, on choisit c_1 de sorte que $|c_1|$ soit minimal.
- Puis on choisit c_2 parmi les $n-1$ nombres restant, de sorte que $|c_1+c_2|$ soit minimal.
- On choisit c_3, etc.

On note C le poids du n-uplet $(c_1, \ldots, c_n)$ obtenu par ce procédé.

1. Déterminer I et C dans les cas suivants.
   a) $n=3$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-4$
   b) $n=4$, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$, $x_4=-2$.
2. Si $n=2$, montrer que $I=C$.
3. ★ Si $n=3$, montrer que $C \leq \frac{3}{2}I$.
4. On suppose $n \geq 4$. On pose

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|), \quad S = |x_1+x_2+\cdots+x_n|, \text{ et } N = \max(M, S)$$

   a) Montrer que $S \leq I$.
   b) Montrer que $M \leq 2I$.
   c) Montrer que $C \leq N$.
   d) En déduire que $C \leq 2I$.
   e) Expliciter n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que $C = 2I$.

II) Optimisation combinatoire

Exercice 12 Quel est le nombre minimal de tours permettant de contrôler toutes les cases inoccupées d'un échiquier $n \times n$?

Exercice 13 Soit $S \subset \{1, 2, \ldots, 1989\}$ tel qu'aucune paire d'éléments de S ne diffèrent de 4 ou 7. Quel est le cardinal maximal de S ?

III) Optimisation géométrique

Exercice 14 Justifier que parmi les triangles inscrit dans le cercle unité, les triangles équilatéraux sont ceux d'aire maximale.

Exercice 15 Sept points sont placés dans un disque (y compris sur le bord), de telle sorte que la distance entre deux d'entre eux est toujours au moins égale au rayon du cercle. Montrer que l'un d'eux est au centre du cercle.

Exercice 16 On considère un polygone $\mathcal{P}$ convexe, c'est-à-dire dont tous les angles intérieurs mesurent entre 0ř et 180ř strictement. On souhaite placer deux carrés à l'intérieur de $\mathcal{P}$, donc les côtés sont parallèles aux axes du repère, et de manière disjointe.

On note A_g la somme maximale des aires des deux carrés si l'on place un premier carré de taille maximale, et un second dans la place qui reste. On note A_{dis} la somme maximale des aires des deux carrés.

1. Donner un exemple pour lequel $A_g \neq A_{dis}$.
2. Montrer que $1 \leq \dfrac{A_{dis}}{A_g} < \dfrac{8}{5}$.

Exercice 17 Pour $r > 1$, on note $N(r)$ et $n(r)$ les nombres de points à coordonnées entières à l'intérieur du disque de rayon r et sur le cercle de rayon r (centrés en l'origine).

1. Montrer que $N(r) \leq r^2$.
2. ★ Montrer que $n(r) < 2\pi\sqrt[3]{r^2}$.

Exercice 18 Vous êtes au centre d'une piscine circulaire, au bord de laquelle se trouve un lion. Est-il possible de sortir de la piscine en toute sécurité (c'est-à-dire d'arriver à un point du bord de la piscine où ne se trouve pas le lion), sachant que le lion se déplace quatre fois plus vite que vous ?

Exercice 19 On se donne n vecteurs $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ du plan dont la somme des longueurs vaut 1. Montrer qu'il est possible de trouver une partie $S \subset [\![1, n]\!]$ telle que la somme correspondante des vecteurs $\overrightarrow{v_i}$, pour $i \in \S$ ait une longueur au moins égale à $\frac{1}{4\sqrt{2}}$. Peut-on faire mieux ?

IV) Algorithmes et jeux

Exercice 20 Un immeuble est constitué de n étages, et l'on possède m assiettes. On souhaite déterminer à partir de quel étage lâcher une assiette par la fenêtre la casse, par des essais successifs. On suppose que si elle ne se casse pas à un essai, on peut descendre récupérer l'assiette et la réutiliser.

1. Si $m=1$, quel est le nombre minimal $N_{n,m}$ de lâchers nécessaires pour trouver la réponse dans le pire des cas ? Et si $m=n$?
2. On suppose $m=2$.
   a) Décrire un algorithme avec $O(\sqrt{n})$ lâchers.
   b) Déterminer $N_{100,2}$. **Ind** : *Le résultat est* < 19.

Exercice 21 Alice et Bob jouent à un jeu : 38 pièces, de diverses valeurs, sont alignées sur une table en face d'eux. Alice choisit une des deux pièces qui occupent une extrémité de la rangée et l'empoche. Bob fait de même, et ainsi de suite jusqu'à ce que Bob empoche la trente-huitième pièce. Montrer qu'Alice peut être sure d'empocher au moins autant d'argent que Bob.