Problèmes du TFJM

I) Appoint monétaire (TJFM 2023)

Dans une galaxie lointaine, très lointaine, le petit prince se déplace de planète en planète pour acheter des marguerites. Chaque planète a son propre système monétaire S, qui est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les pièces de monnaie sur cette planète. Les pièces de monnaie ont toutes des valeurs entières strictement positives.

Dans cette galaxie, on ne rend pas la monnaie. Dans toute la suite, on supposera toujours que $1 \in S$ afin que tous les prix soient réalisables comme somme de valeurs dans S. Par exemple, le système monétaire des « pièces rouges de centimes d'euro » est $S = \{1, 2, 5\}$.

Lorsque le petit prince arrive sur une planète avec une certaine somme d'argent $x \in \mathbb{N}$, il convertit son argent dans le système monétaire S. Il ne ne sait pas comment on va lui faire la monnaie, c'est-à-dire quelles pièces il va recevoir.

Il ne pourra acheter une marguerite que s'il est sûr d'avoir l'appoint pour le prix indiqué. Par exemple, si son argent est de $x = 4$, dans le système monétaire $S = \{1, 2, 5\}$, il peut recevoir :

- 2 pièces de valeur 2,
- 1 pièce de valeur 2 et 2 pièces de valeur 1,
- 4 pièces de valeur 1.

Il est donc sûr d'avoir l'appoint pour les prix 0, 2 et 4 mais pas pour les prix 1 et 3.

On notera $A_S(x)$ l'ensemble des prix pour lesquels il est certain d'avoir l'appoint dans le système S pour une quantité x d'argent. Par exemple $A_{\{1,2,5\}}(4) = \{0, 2, 4\}$.

1. Le petit prince est sur une planète où $S = \{1, 3, 10\}$. Pour quels prix est-il sûr d'avoir l'appoint si

a) son argent est de $x = 10$? **b)** son argent est de $x = 100$? **c)** son argent est de $x = 10^n$?

Les marchands de marguerites ne veulent pas négocier les prix et cherchent des prix $p \geq 1$ pour lesquels si on a l'appoint pour ce prix, alors on n'est pas certain d'avoir aussi l'appoint pour un prix plus petit autre que 0 et p, c'est-à-dire que $A_S(p) = \{0, p\}$. Un tel prix est dit S-primaire.

Par exemple, pour $S = \{1, 2, 5\}$,

- le prix 4 n'est pas S-primaire car si on a l'appoint pour 4 alors on est aussi certain d'avoir l'appoint pour 2.
- le prix 6 est S-primaire car $6 = 5 + 1 = 2 + 2 + 2$ donc avec l'appoint pour 6, on peut ne pas avoir l'appoint pour 1, 2, 3, 4 ou 5.

On notera $\mathcal{P}_S$ l'ensemble des prix S-primaires. Par exemple, $1, 2, 5, 6 \in \mathcal{P}_{\{1,2,5\}}$ mais $0, 3, 4 \notin \mathcal{P}_{\{1,2,5\}}$.

2. Quels sont les prix S-primaires si :

a) $S = \{1, u\}$ pour $2 \leq u$? **b)** $S = \{1 + 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$? **c)** $S = \{2^n, n \in \mathbb{N}\}$?

d) $S = \{1, v, w\}$ pour $2 \leq v < w$? **e)** S est l'ensemble des nombres premiers ou égaux à 1 ?

3. Déterminer l'ensemble des parties S de $\mathbb{N}^*$ telles que $\mathcal{P}_S$ est fini.

II) Un jeu de jetons (TFJM 2014)

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère un jeu à deux joueurs qui se joue avec n jetons identiques. Une configuration est la répartition de ces n jetons en un certain nombre de piles. Par exemple, pour $n = 4$, les configurations possibles sont les suivantes :

$$[4], \quad [3, 1], \quad [2, 2], \quad [2, 1, 1], \quad [1, 1, 1, 1].$$

En partant d'une configuration de départ, les joueurs jouent à tour de rôle et peuvent :

- soit diviser une pile en $m \geq 2$ piles de même taille.
- soit fusionner deux piles de tailles différentes.

Le joueur n'ayant plus de coup possible a perdu.

1. Si on imagine que les joueurs ne cherchent pas nécessairement à gagner, pour quels $n \geq 2$ existe-il des parties qui durent indéfiniment ?

> **Définition** Une configuration c est dite de longueur ℓ si, partant de celle-ci, un des deux joueurs est sûr de pouvoir gagner en ℓ coups (on compte les coups des deux joueurs) et si pour tout $k < \ell$, son adversaire peut l'empêcher de gagner en k coups. On note alors $\ell(c) = \ell$.

Exemple Pour $n = 4$, en partant de la configuration $[3, 1]$, le joueur qui commence (noté J_1) est sûr de pouvoir gagner en 1 coup. En effet, s'il joue $[3, 1] \longrightarrow [1, 1, 1, 1]$, l'autre joueur (noté J_2) n'a plus de coup possible, et J_1 a donc gagné. Conclusion, $\ell([3, 1]) = 1$.

Exemple Pour $n = 4$, en partant de [2,2], J_2 est sûr de pouvoir gagner en 2 coups. En effet, J_1 n'a qu'un seul coup possible : $[2, 2] \longrightarrow [2, 1, 1]$. J_2 peut ensuite jouer $[2, 1, 1] \longrightarrow [1, 1, 1, 1]$ et J_1 a alors perdu. Conclusion, $\ell([2, 2]) = 2$.

> **Définition** Une configuration c est dite de longueur finie s'il existe un $l \in \mathbb{N}$ telle qu'elle soit de longueur ℓ. Sinon, on pose $\ell(c) = \infty$. La longueur du jeu est définie comme étant la plus grande longueur parmi ses configurations de longueur finie.

2. Trouver toutes les configurations de longueur 1.

3. Caractériser les $n \geq 2$ pour lesquels le jeu à n jetons est de longueur supérieure ou égale à : **a)** 2 **b)** 4

4. Soit $n \geq 2$. Étudier la longueur du jeu à n jetons.

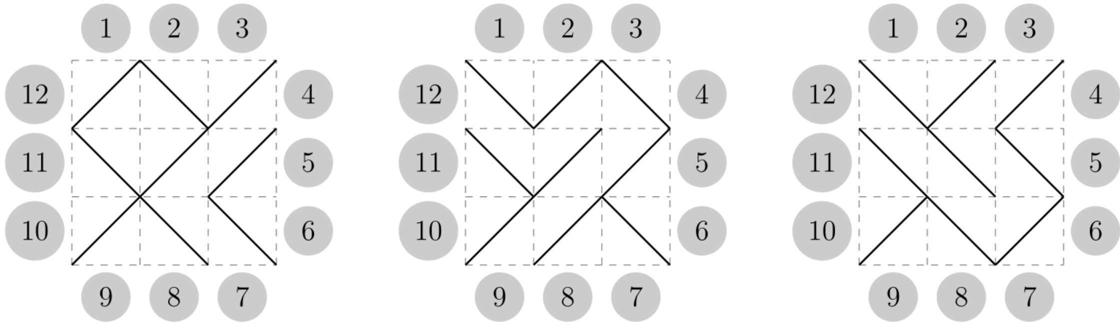
5. Pour quels $n \geq 2$ les configurations du jeu à n jetons sont-elles toutes de longueur finie ?

III) Labyrinthes (TFJM 2017)

On considère un grand carré de côté $n \in \mathbb{N}^*$, quadrillé par des petits carrés de côté 1 . Dans chaque petit carré, on trace une et une seule diagonale qui délimite deux petits triangles. On appelle labyrinthe de taille n la donnée de ces tracés. Les petits segments divisent le bord du grand carré en segments de longueur 1 , numérotés de 1 à $4n$ comme sur la figure 1 . On appelle chemin de i à j une suite de petits triangles $(t_1, \ldots, t_\ell)$ deux à deux distincts tels que :

- t_i et t_{i+1} ont exactement un côté en commun qui n'est pas l'une des diagonales tracées ;
- le segment i est un côté de t_1 et le segment j est un côté de t_ℓ.

On dit que ℓ est la longueur du chemin de i à j. On appelle profondeur d'un labyrinthe la longueur maximale d'un chemin du labyrinthe. On appelle complexité d'un labyrinthe la somme de toutes les longueurs des chemins.



Profondeur $= 5$ Complexité $= 14$ | Profondeur $= 9$ Complexité $= 18$ | Profondeur $= 9$ Complexité $= 18$

On dit que deux labyrinthes sont de même type si on peut transformer l'un en l'autre par une rotation du grand carré. Parmi les trois labyrinthes ci-dessus, celui au centre est du même type que celui de droite, mais n'est pas du même type que celui de gauche.

1. Étant fixée la taille n du labyrinthe, combien existe-t-il **a)** de labyrinthes ? **b)** de types différents de labyrinthes ?
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Quelles sont les valeurs possibles pour la complexité d'un labyrinthe de taille n ?
   b) Quelles sont les valeurs minimales et maximales pour la profondeur ?

Étant donné un labyrinthe L de taille n, on classifie les entiers de 1 à $4n$ de sorte que i et j sont dans la même classe lorsqu'ils sont reliés par un chemin dans le labyrinthe L. On appelle partition de L l'ensemble de ces classes.

3. Trouver des conditions nécessaires ou suffisantes pour qu'étant donnée une partition de $\{1, \ldots, 4n\}$, il existe un labyrinthe dont c'est la partition.

On dit que deux chemins $(t_1, \ldots, t_\ell)$ et $(t'_1, \ldots, t'_{\ell'})$ sont adjacents s'il existe des triangles t_p et t'_q ayant une diagonale tracée en commun. On colorie les chemins avec différentes couleurs (comme dans la Figure 2) : on appelle nombre chromatique d'un labyrinthe L, noté χ_L, le nombre minimal de couleurs pour que deux chemins adjacents de L soient de couleurs différentes.

4. Quelles valeurs peut prendre le nombre chromatique d'un labyrinthe de taille $n \in \mathbb{N}^*$ fixée ?

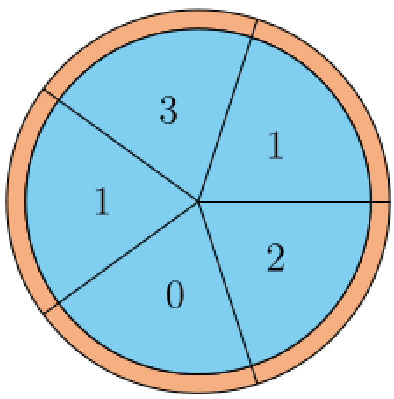
IV) Un festin stratégique (TFJM 2020)

Lily et Hadrien se retrouvent pour un festin, et ils veulent tous les deux manger le plus possible.

Une pizza est découpée en n parts, et chacune a un certain poids qui est un réel positif ou nul correspondant à la quantité de garniture sur la part. On note S la somme de tous les poids, que l'on suppose strictement positive.

Lily commence par prendre la part de son choix. Ensuite, à tour de rôle en commençant par Hadrien, les deux amis prennent une part parmi les deux qui sont voisines d'une part déjà prise jusqu'à ce qu'il ne reste plus de pizza. Le gain d'un joueur est la somme des poids de ses parts, divisé par S.

Avec par exemple la pizza illustrée sur la figure ci-contre, Lily peut commencer par prendre la part de poids 3. Dans ce cas, Hadrien peut prendre une des deux parts de poids 1, par exemple celle de droite. Ensuite Lily peut prendre la part de poids 2 puis Hadrien l'autre de poids 1 et enfin Lily finit en prenant la part de poids 0. Dans ce cas le gain de Lily est de $\frac{3+2+0}{S} = \frac{5}{7}$.



Une pizza à $n = 5$ parts et de poids total $S = 7$.

Étant donné une répartition des poids sur la pizza, on note $g_{\max}$ le plus grand gain que Lily peut s'assurer à coup sûr quelle que soit la manière de jouer de Hadrien.

Néanmoins, elle décide parfois de moins réfléchir et de jouer de la manière suivante : elle prend la part la plus lourde au premier tour, puis à chaque étape la part la plus lourde parmi les deux parts qu'elle peut prendre. Lorsqu'il y a une égalité elle peut choisir la part qu'elle souhaite. Le gain maximal qu'elle peut s'assurer en suivant ces règles est noté g_{glouton} . En particulier, $g_{\max} \geq g_{\text{glouton}}$.

1. Lorsque $n = 2, 3, 4, 5$, quelles sont les valeurs possibles de $g_{\max}$?
2. Pour quels entiers n peut-on avoir $g_{\max} > g_{\text{glouton}}$?
3. Pour quels entiers n a-t-on nécessairement $g_{\max} \geq \frac{1}{2}$?
4. Soit n un entier. Encadrer aussi précisément que possible la plus petite valeur possible pour $g_{\max}$.