

TD Logique et démonstrations

Logique

LCS Exercice 1 Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ écrire formellement les assertions suivantes

1. $x_1, \dots, x_n$ sont tous non nuls.
2. $x_1, \dots, x_n$ sont non tous nuls.

113 Exercice 2 🍷 Compléter par $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$ de sorte que l'assertion soit toujours correcte. Justifier les implications fausses par des contre-exemples, et les implications vraies par un argument.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}, x = y \quad x^2 = y^2$
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+, x = y \quad x^2 = y^2$
3. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+, x \leq y \quad \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
4. Pour $x, y \in \mathbb{R}^*, x < y \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
5. Pour $x \in \mathbb{R}, x^2 < x \quad x < 1$
6. Pour $n, m, k \in \mathbb{N}, (n \mid k \text{ et } m \mid k) \quad nm \mid k$

EMV Exercice 3 Compléter par l'implication ou l'équivalence toujours correcte.

1. $\forall x \in E, P(x) \text{ et } Q(x) \quad (\forall x \in E, P(x) \text{ et } \forall x \in E, Q(x))$
2. $\exists x \in E, P(x) \text{ et } Q(x) \quad (\exists x \in E, P(x) \text{ et } \exists x \in E, Q(x))$
3. $\forall x \in E, P(x) \text{ ou } Q(x) \quad (\forall x \in E, P(x) \text{ ou } \forall x \in E, Q(x))$
4. $\exists x \in E, P(x) \text{ ou } Q(x) \quad (\exists x \in E, P(x) \text{ ou } \exists x \in E, Q(x))$

3FQ Exercice 4 🍷 Soit (u_n) une suite réelle et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner le sens et la négation formelle des propriétés.

1. $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|u_n| \leq \varepsilon)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
4. $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq m \text{ et } u_n = 0)$

AGO Exercice 5 🍷

1. Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition formelle de
 2. Montrer que la somme de deux suites majorées est majorée.
 3. Montrer que la somme d'une suite non majorée et d'une suite minorée est non majorée.
- a) (u_n) non majorée. b) (u_n) minorée.

Démonstrations

F6M Exercice 6 🍷 Soit x un réel irrationnel.

1. Montrer que pour tout nombre rationnel r , le réel $r + x$ est aussi un nombre irrationnel.
2. Énoncer un résultat analogue pour rx .
3. Montrer que la somme de deux nombres irrationnels n'est pas toujours irrationnelle.

X0C Exercice 7 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $abc = 1$ si et seulement s'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ tels que $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

8FQ Exercice 8 🍷 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{2}$. Montrer que ce couple d'entiers (a, b) est unique.

5XY Exercice 9 🍷 Montrer que toute fonction $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction g vérifiant $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.

AYY Exercice 10

1. Soit $a \geq -1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - a)^n \leq \frac{1}{1 + na}$.

Arithmétique

G1K Exercice 11 🍷 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que d est premier avec n si et seulement si $n - d$ est premier avec n .

F9I Exercice 12 🍷 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, rappeler la factorisation de $x^n - 1$ par $x - 1$.

2. Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \mid m$, alors $a^n - 1 \mid a^m - 1$.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier.

3VW Exercice 13 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 2^p(2q + 1)$.

6FT Exercice 14 Montrer que 2023 ne peut pas s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

Indication : Travailler modulo 4, ou considérer le reste de la division euclidienne par 4.

Analyse

VP9 Exercice 15 Montrer que la somme de deux suites périodiques est une suite périodique.

ET6 Exercice 16 Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On considère les propriétés

$$(P): \forall c \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in I, |x - c| < \varepsilon \quad \text{et} \quad (Q): \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b) \Rightarrow \exists x \in I, a \leq x \leq b.$$

Montrer que (P) et (Q) sont équivalentes.

Si I vérifie ces propriétés, on dit que I est dense dans $\mathbb{R}$.

H6K Exercice 17 ★ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes, qui caractérisent la croissance exponentielle de la suite.

- (i) $\exists \lambda > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq \lambda^n$
- (ii) $\exists C > 0, \exists \mu > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, u_n \geq C\mu^n$

8WH Exercice 18 ★ Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x .

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n + 1$.

2. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq C(n+1)$.

Indication : L'assertion $u_n \leq C(n+1)$ n'est pas héréditaire, mais d'autres le seraient.

N9Z Exercice 19 ★ Soit (u_n) une suite réelle strictement positive vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 1$.

Réurrences

MWJ Exercice 20 🍷 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^n$.

FSL Exercice 21 Déterminer une expression simple du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} = 2u_n$ et $u_{2n+1} = u_n + u_{n+1}$.

5J3 Exercice 22 1. En factorisant la différence, montrer que pour $x_1, x_2 \geq 1$, on a $x_1 + x_2 \leq 1 + x_1x_2$.

2. Soit $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \geq 1$. Montrer que $x_1 + \dots + x_n \leq (n-1) + x_1 \dots x_n$.

LP6 Exercice 23 🍷 On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$ et la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que (F_n) est croissante.

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1, F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0, F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$.

4. ★ Montrer que pour tout $n \geq 1, F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$.

GJ3 Exercice 24 ★ THÉORÈME DE ZECKENDORF Montrer que tout entier $n \geq 0$ s'écrit, de manière unique, comme la somme de termes de la suite de Fibonacci distincts, d'indices ≥ 2 ($F_2 = 1, F_3 = 2$), et non consécutifs.

E2N Exercice 25 ★ ★ Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ distincts, et M un ensemble de $n-1$ entiers strictement positifs, ne contenant pas $s = a_1 + \dots + a_n$. Une sauterelle saute le long de l'axe réel, à partir de l'origine. Elle va faire n sauts vers la droite, de longueurs $a_1, \dots, a_n$, dans un ordre quelconque. Montrer que l'on peut choisir l'ordre de sorte qu'elle évite tous les points de M .

Équations fonctionnelles

S9Z Exercice 26 Déterminer les fonctions $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $\forall n, m \in \mathbb{Z}, f(n+m) = f(n) + f(m)$.

XCW Exercice 27 Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on considère l'équation fonctionnelle $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x+y) - f(x-y) = xy$ (*)

1. Soit f vérifiant (*). Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ en fonction de x et de $f(0)$.

2. Quelles sont les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (*) ?

Divers

33Z Exercice 28 UNE INTERVERSION DE QUANTIFICATEURS On colorie le plan $\mathbb{R}^2$ avec deux couleurs.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de la même couleur à distance x l'un de l'autre.

2. Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de cette couleur à distance x l'un de l'autre.

UFP Exercice 29 ★ Pour $A \subset \mathbb{Z}^2$ une partie finie, on note ∂A la frontière de A , c'est-à-dire l'ensemble des points de A dont au moins un voisin (à une distance 1) n'appartient pas à A . Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\text{Card}(\partial A) \geq C \sqrt{\text{Card}(A)}$, indépendamment de la partie $A \subset \mathbb{Z}^2$.

Indication : Considérer H/L le nombre d'ordonnées/d'abscisses distinctes des éléments de A .

VCD Exercice 30 ★ UN PROBLÈME DE JOHN CONWAY Soit E un ensemble de points de $\mathbb{R}^2$. On note $|x-y|$ la distance euclidienne entre deux points de $\mathbb{R}^2$.

• On dit que E contient des points arbitrairement proches si $\forall \varepsilon > 0, \exists x, y \in E, (x \neq y \text{ et } |x-y| \leq \varepsilon)$.

• On dit que E est 1-séparé si $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow |x-y| \geq 1$.

Montrer l'équivalence entre les assertions

(i) «Tout ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ qui intersecte tout rectangle d'aire 1 contient des points arbitrairement proches»

(ii) «Pour toute partie 1-séparée E , il existe des rectangles d'aires arbitrairement grandes qui n'intersectent pas E ».

Graphes

5E4 Exercice 31 La population d'un village se réunit un jour de fête. Prouver que le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair.

Z1N Exercice 32 Soit G un graphe à m arêtes et n sommets. Montrer que si $m \geq n$, alors G admet un cycle.

K8D Exercice 33 Soit G un graphe dont le degré moyen est au moins d , c'est-à-dire tel que $m \geq \frac{dn}{2}$. Montrer que G contient un sous-graphe H , obtenu en retirant certains sommets de G et les arêtes attachées, dont tous les sommets soient de degré au moins $\frac{d}{2}$.

VE4 Exercice 34 ♣ FORMULE D'EULER Un graphe connexe est dessiné dans le plan, sans que les arêtes ne se croisent. On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes, et f le nombre de faces (dont la face infinie extérieure). Montrer que $s - a + f = 2$.

SBR Exercice 35 ★ Dans une grille $n \times n$, on place $2n$ jetons. Montrer qu'il existe $k > 1$ et une suite de jetons $c_1, \dots, c_{2k}$ tels que l'on puisse successivement sauter de c_i à c_{i+1} (et finalement de c_{2k} à c_1) en se déplaçant alternativement sur une ligne ou sur une colonne de la grille.

Indication : Se ramener à l'existence d'un cycle dans un graphe. La difficulté est dans le choix du graphe.