




TD Nombres complexes

Formes algébrique et exponentielle

BH6 Exercice 1   IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

- Montrer que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
- Représenter graphiquement les points $O(0), A(z), B(z'), C(z + z')$ et le vecteur d'affixe $z - z'$.
Interpréter géométriquement l'identité précédente.

99P Exercice 2  Soient z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes.

- Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} \operatorname{Re}(z_k \bar{z}_\ell).$$

Que retrouve-t-on si $\forall i, z_i \in \mathbb{R}$?


- On suppose les z_k non nuls et on pose $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, où $\rho_k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_k \in [0, 2\pi[$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|^2 = \sum_{k=1}^n \rho_k^2 + 2 \sum_{k < \ell} \rho_k \rho_\ell \cos(\theta_k - \theta_\ell).$$

- En déduire que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$. Donner une CNS pour que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$.

T9R Exercice 3 Que dire de nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_{2023} \in \mathbb{C}$, qui soient tous des racines 2023-ièmes de l'unité et vérifient

$$\sum_{i=1}^{2023} \lambda_i = 2023 \quad ?$$

G7R Exercice 4  Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{2k+1}$.

Indication : Considérer $(1 + i)^{2n}$.

IXA Exercice 5 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|a| > |b| > |c|$.


- Est-il possible que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n + b^n + c^n = 0$?
- et si on suppose uniquement $|a|, |b|, |c| \neq 0$?

PN7 Exercice 6

- Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $|z| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}(ze^{i\theta})$.
- Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ des nombres complexes de parties réelles et imaginaires positives. Montrer que

$$|z_1 + \dots + z_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_1| + \dots + |z_n|).$$

YW9 Exercice 7 Soit $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Montrer que l'application $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ réalise une bijection de P sur D .



PUP Exercice 8  [X] Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, d'arguments $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

- Montrer que $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^n |z_k| |\cos(\theta_k - \theta)| = \sup_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right|$.

Indication : On admettra que la borne supérieure de gauche est atteinte (théorème lié à la continuité).

- Montrer que $\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \frac{\pi}{2} \sup_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right|$. **Ind :** $\frac{2}{\pi}$ est la valeur moyenne de $|\cos|$.
- Montrer que la constante $\frac{\pi}{2}$ est optimale.

Nombres $e^{i\theta}$

F9P Exercice 9   Mettre sous pseudo forme exponentielle les complexes suivants.


- $\frac{1 - e^{ix}}{1 + e^{ix}}$
- $1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$
- $\frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}$

A4P Exercice 10   Résoudre l'équation

- $z^6 + 1 = 0$
- $(z + 1)^5 = z^5$
- $1 + z^n + z^{2n} = 0$
- $z^4 = z + \bar{z}$

Indication : Se ramener à des racines n -ièmes de \dots

92Z Exercice 11 Déterminer les nombres complexes z tels que $z, \frac{1}{z}$ et $1 - z$ aient le même module.

CD3 Exercice 12  Soient $z, z' \in \mathbb{U}$, avec $zz' \neq -1$. Montrer que

$$\frac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}.$$

XI2 Exercice 13   [ENS] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme μ_n des racines primitives n -ièmes de l'unité.

Indication : Appliquer le principe d'inclusion-exclusion.

Équations du second degré

0U5 Exercice 14 🍴 Factoriser le polynôme suivant sur \mathbb{C} .

1. $z^3 + (i+1)z^2 + (i+1)z + 1$

2. $iz^3 + iz^2 - 2iz - z + 1$

Indication : Commencer par trouver une racine évidente.

YBW Exercice 15 🍴 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^4 + 2 \cos \theta z^2 + 1 = 0$.

XYM Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z^2 + 1)^n - (z + i)^{2n} = 0$.

Trigonométrie

VTW Exercice 17 🍴 Soit $\theta = \frac{2\pi}{5}$ et $\omega = e^{i\theta}$. En écrivant $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$, montrer que $1 + 2 \cos \theta + 2 \cos(2\theta) = 0$. En déduire $\cos \theta$.

ZJJ Exercice 18 Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

SJT Exercice 19 🍴 Calculer

1. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx)$

2. $\sum_{k=0}^n \cos(x + ky)$

3. $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(kx)$

4. $\sum_{k=0}^n \sin \frac{\pi}{2^k} \sin \frac{3\pi}{2^k}$

JIT Exercice 20 🍴 Factoriser

1. $-\sqrt{3} \cos t + \sin t$

2. $\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)$

YR9 Exercice 21 🍴 Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{2\pi} \cos(pt) \cos(qt) dt$.

Géométrie

EW9 Exercice 22 🍴 Trouver les nombres complexes z tels que les points d'affixes

1. z, z^2 et z^3 soient alignés.

2. z, z^2 et z^4 forment un triangle rectangle en z .

Indication : Se contenter d'une équation reliant x et y , qui décrit une hyperbole.

3. $1, z$ et iz soient alignés.

MD3 Exercice 23 Donner sans justification la description géométrique de l'application $z \mapsto iz + 2$.

WL6 Exercice 24 Soient A, B deux points distincts du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé dans lequel $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On note \mathcal{C} l'ensemble des points M tels que $M = A, M = B$, ou $\text{Angle}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$.

1. On note z l'affixe de M . Montrer que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(z - a)(\bar{z} + a)e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$.

2. On pose $z = x + iy$. Déduire de la question précédente une équation de \mathcal{C} de la forme $(x^2 + y^2) \sin \theta + \dots = 0$.

3. En déduire que si $\theta \not\equiv 0[\pi]$, \mathcal{C} est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

WP8 Exercice 25 Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 0$. Que dire du triangle formé par les points images ?

Indication : Traduire l'hypothèse $a + b + c = 0$ géométriquement, ou se ramener au cas où $a = 1$.

W6C Exercice 26 🍴 CARACTÉRISATIONS DES TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX Soient A, B, C trois points distincts du plan, d'affixes a, b, c .

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

G7D Exercice 27 ★

1. Soit z_1, \dots, z_n les sommets d'un n -gone régulier. Montrer que la famille $(z_i + (z_{i+2} - z_{i+1}))_{1 \leq i \leq n}$ forme un n -gone régulier.

2. Montrer que pour $n \geq 5$, il n'existe pas de n -gone régulier dont les sommets sont à coordonnées entières. Qu'en est-il des cas $n = 4$ et $n = 3$?

Analyse

0L8 Exercice 28 🍴 Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x+ia}$.

P9P Exercice 29 Soit $a \in \mathbb{C}$. Déterminer les solutions complexes de l'équation $e^z = a$.

RD3 Exercice 30 🍴 Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

1. En considérant la quantité $\sin((n+1)\theta)$, montrer que si la suite $(\sin n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il en va de même de la suite $(\cos n\theta)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. En déduire une contradiction.

GUH Exercice 31 🍴

1. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta$.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes, et $r \geq 0$.

a) Calculer, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$.

b) Justifier l'existence de $\sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$. Montrer que $\max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |a_i| \leq \sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$.

NJM Exercice 32 ★ Montrer qu'il n'est pas possible de partitionner le plan \mathbb{R}^2 en une réunion disjointe de cercles de rayons strictement positifs.

KM8 Exercice 33 ★ Étudier, en fonction du premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$, la convergence d'une suite (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2$.