TD Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

!! Je n'aime pas le 4668 : à séparer. Il est simple de montrer que $\cos\circ\cos$ n'admet qu'un unique point fixe.
Et pour le point fixe de $\cos$: donner la stricte décroissance, sous l'hypothèse que le nombre de zéros de la dérivée est discret.

Exercice 1 On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{2} + 1$.

1. Déterminer $K < 1$ tel que la fonction $f\colon x \mapsto \frac{\sin x}{2} + 1$ soit K-lipschitzienne.
2. Montrer que f admet un point fixe a dans $[0, 2]$.
   Indication : Considérer $g\colon x \mapsto f(x) - x$.
3. En utilisant le caractère lipschitzien, montrer que ce point fixe est unique.
4. Majorer $|u_n - a|$ en fonction de n, K et $|u_0 - a|$. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 2 Discuter de la convergence des suites, en fonction de u_0.

1. $u_{n+1} = \sin u_n, u_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ puis $u_0 \in \mathbb{R}$
2. $u_0 \geq \frac{-3}{2}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$
3. $u_0 \geq 0,\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}$
4. $u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2$
5. $u_0 > 0, u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2}$
6. $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$

Exercice 3

1. Montrer que $\cos$ admet un unique point fixe ℓ.
2. ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-lipschitzienne.
   (a) Montrer que l'ensemble A des points fixes de f est un intervalle.
   Indication : Utiliser la caractérisation des intervalles.
   (b) Montrer que si A est non vide et borné, c'est un segment.
   Indication : Il s'agit de montrer que les extrémités de A appartiennent à A. Justifier et utiliser la continuité de f.
3. Montrer que $\cos\circ\cos$ admet un unique point fixe.
4. Étudier la convergence d'une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n$.

Exercice 4 Algorithme de Héron Soit $a > 0$, on définit une suite (u_n) par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$.
   Indication : *On a* $|u_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2u_n}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de n et a.
4. Pour $a = 2$, montrer que $|u_n - \sqrt{a}| \leq (\frac{1}{4})^{2^n - 1}$. En utilisant $2^{10} \geq 10^3$, montrer que $r_{12} \leq 10^{-2023}$. à partir de quelle valeur de n est-ce que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Exercice 5 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\sin x)$. Montrer que f est constante.
Indication : *Pour $x \in \mathbb{R}$, introduire une suite (u_n).*

Exercice 6 [En DM] ★ Soit (u_n) vérifiant

$$u_0 \in]0,4[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que (u_n) est bornée. Quelles sont les limites possibles de (u_n) ?
2. Montrer que si (u_n) converge, elle est stationnaire.
3. On pose $u_0 = 4\sin^2\alpha$. Pour quelles valeurs de u_0 est-ce que la suite (u_n) converge ?

Exercice 7 ★ Soit $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a,b]$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. Puis un segment.
2. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 8 ★ [Centrale MP] Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \frac{1}{n}$.
Indication : *Pour $a > 1$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq a$.*

Exercice 9 ★ [X 2022] Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles, vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \int_0^1 \max(x, v_n)\,\mathrm{d}x$ et $v_{n+1} = \int_0^1 \max(x, u_n)\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence des deux suites.