TD Polynômes

Exercice 1 ✎ ♣ Polynômes de Tchebychev On considère la suite de polynômes définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n, et, pour $n \geq 1$, de coefficient dominant 2^{n-1}.
2. Relation fonctionnelle.
   (a) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, factoriser $\cos a + \cos b$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(*)\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (c) Montrer que T_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$.
3. Racines et factorisation.
   (a) En utilisant $(*)$ expliciter n racines distinctes de T_n.
   (b) Factoriser T_n et calculer $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$.

Rigidité polynomiale

Exercice 2 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^2 + (-1)^n$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sin x$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = e^x$
5. $\forall x \in [0,2\pi],\ P(x) = \sin x$
6. $\forall x \geq 0,\ P(x) = \sqrt{x}$

Exercice 3 ✎ ♡ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme vérifiant $P(X+1) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.

Exercice 4 ✎ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul tel que $(X+3)P(X) = XP(X+1)$.

1. Montrer que si α est une racine complexe non nulle de P, alors $\alpha + 1$ est également une racine de P.
2. En déduire que toutes les racines complexes de P sont réelles, et que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que si α est une racine de P différente de -2, alors $\alpha - 1$ est une racine de P.
   En déduire si α est racine de P, alors $\alpha \in \{-2, -1, 0\}$.
4. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X+3)P(X) = XP(X+1)$?

Exercice 5 Soit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ et $f\colon x \mapsto a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big)$ un polynôme trigonométrique.

1. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-inx}P(e^{ix})$.
2. Montrer que f s'annule au plus $2n$ fois sur $[0,2\pi[$.

Algèbre

Exercice 6 ✎ 🏠 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

1. $P = X^2P'$
2. $P = XP'$
3. $P(2X) = XP'(X)$
4. $(X-1)P' = nP$
5. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Indication : *Considérer le degré, ou le coefficient dominant. Pour le 4., écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et déterminer les coefficients.*

Exercice 7 On note $\tan^{(n)}$ la dérivée n-ième de $\tan$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$. Préciser son degré, et son coefficient dominant. En déduire que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) \geq 0$.

Exercice 8 Soit $P = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - a_k) \in \mathbb{C}[X]$ scindé. Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$ différent des a_i, on a $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z - a_k}$.

Exercice 9 ♣ En développant le polynôme $(X+1)^{2n}$ de deux manières, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Arithmétique

Exercice 10 ✎ 🏠 Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par

1. $A = X^2 - 3X + 2$
2. $B = X^2 - 2X + 1$

Indication : *Pour A, écrire la division euclidienne, calculer $R(1)$ et $R(2)$. En déduire les coefficients de R. Pour B : $B'(1) = 0$.*

Exercice 11 ✎ Soit $A = 1 + X + X^2$ et $P = 1 + X^n + X^{2n}$.

1. Montrer que $A \mid P$ si et seulement si $P(j) = 0$.
2. Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles A divise P.

Exercice 12

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on considère la division euclidienne $n = pq + r$ de n par p.
   (a) Montrer que $X^p - 1$ divise $X^{pq} - 1$.
   (b) Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$ est $X^r - 1$.
   En déduire que $X^p - 1$ divise $X^n - 1$ si et seulement si $p \mid n$.
   (c) Retrouver ce résultat en utilisant la factorisation de ces polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.
2. ★ Montrer que pour $a, b \in \mathbb{N}$, $\mathrm{pgcd}(X^a - 1, X^b - 1) = X^{\mathrm{pgcd}(a,b)} - 1$.

Racines

Exercice 13 Soit P un polynôme de degré n dont les racines complexes sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

1. Quelles sont les racines des polynômes (a) $Q_1 = P(2X)$? (b) $Q_2 = P(1-X)$? (c) $Q_3 = P(X^2)$?
2. On considère $Q = X^n P(\frac{1}{X})$, appelé polynôme réciproque de P.
   (a) Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, vérifier que Q est un polynôme, et décrire ses coefficients.
   (b) Quelles sont les racines de Q ?

Exercice 14 $P = X^n + 1$.

1. Déterminer les racines complexes de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$ et $q_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

1. Donner une relation entre q_n et p_n.
2. Factoriser le polynôme $R(X) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$. En déduire que $q_n = n$.

Exercice 16 ★ [ENS 2022]

1. Pour $n \geq 1$, montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin(4n\theta) = \cos\theta \sin\theta P_n\big(\cos^2\theta\big)$.
2. Calculer $\prod\limits_{k=1}^{2n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$ puis $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right)$, puis $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

… et multiplicité

Exercice 17 Soit $P = X^3 - aX + b \in \mathbb{K}[X]$.

1. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Déterminer une CNS sur a, b pour que les trois racines de P soient simples.
   Indication : *On se ramène à la résolution d'un système. Injecter la valeur de x^2 dans l'autre équation. On trouve $4a^3 = 27b^2$.*
2. Retrouver le résultat précédent en calculant le reste de la division euclidienne de P par P'.
3. En déduire une CNS sur p, q, r pour que les racines de $X^3 + pX^2 + qX + r = 0$ soient simples.
4. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $a > 0$. Déterminer une CNS sur a, b pour que P admette trois racines réelles distinctes.

Exercice 18 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme pair.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que si λ est racine de P de multiplicité m, $-\lambda$ l'est également.
2. Montrer que si 0 est racine, elle a une multiplicité paire. En déduire que P admet un nombre pair de racines, comptées avec multiplicité.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X^2-1)^2$ divise $P = X^{2n+2} - X^{2n} - X^2 + 1$.

Exercice 19 ★ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Relations coefficients-racines

Exercice 20 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Comparer $\Big(\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)^2$ et $n \sum\limits_{k=1}^n x_k^2$.

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $a_n a_{n-2} \leq \frac{n-1}{2n} a_{n-1}^2$.

Exercice 21 ★ Sommes de Newton Soient $a_1, \dots, a_n$ des scalaires. On note $P(X) = \prod\limits_{i=1}^n (X - a_i) = \sum\limits_{i=0}^n (-1)^i \sigma_i X^{n-i}$ où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires des racines, et on considère les sommes de Newton $S_k = \sum_{i=1}^n a_i^k$.

1. Si $p \geq n$, montrer que $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \sigma_2 S_{p-2} \cdots + (-1)^n \sigma_n S_{p-n} = 0$.
2. ★ Pour $1 \leq p \leq n$, montrer que $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \dots + (-1)^{p-1}\sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p \sigma_p p = 0$.

En particulier, si les coefficients de P sont entiers, les sommes S_k sont entières.

Autres

Exercice 22 On note $\mathcal{S}_+$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) > 0$, et $\mathcal{S}$ ceux vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geq 0$.

1. Caractériser sans justifier les décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de $\mathcal{S}_+$.
2. Caractériser sans justifier les décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de $\mathcal{S}$.
3. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui s'écrivent sous la forme $P = A^2 + B^2$, pour $A, B \in \mathbb{R}[X]$.
   Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit, puis que $\mathcal{U} = \mathcal{S}$.

Exercice 23 ★

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. **Indication** : *Interpolation.*
3. Si $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, a-t-on nécessairement $P \in \mathbb{Z}[X]$?