TD Limites et continuité

Limites

Exercice 1 🏠 Déterminer les limites suivantes

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ en 0^+
2. $\frac{\ln\left(\cosh(\alpha x)\right)}{\ln(\cosh x)}$ en $+\infty$
3. $x \sin \frac{1}{x}$ en $+\infty$

Exercice 2 🪶

1. Montrer que $x \ln|\ln x| \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
   Indication : *Pour* $x \to 0^+$*, majorer* $|\ln x|$*, via* $|\ln x| = \ldots$.
2. Déterminer la limite en 0 de $f\colon x \mapsto \frac{|\ln x|^x}{x^{\ln x}}$.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f\colon x \mapsto \frac{|\ln x|^x}{x^{\ln x}}$.

Exercice 3 Déterminer la limite éventuelle de

1. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ en 2
2. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
3. $(x-2)\ln(x^3-2x^2+x-2)$ en 2^+

Exercice 4 Déterminer les limites suivantes, en faisant apparaître des croissances comparées.

1. $x\ln(x+\sqrt{x})$ en 0^+
2. $\frac{e^x}{x^2\ln x}$ en $+\infty$
3. $\frac{e^{\sqrt{x}/2}}{x}$ en $+\infty$

Exercice 5 Soit f une fonction réelle telle que $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) - \alpha x \to +\infty$

Exercice 6 ★ ★ Caractère ouvert de l'ensemble des polynômes scindés à racines simples
Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré d.

1. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et P scindé à racines simples, de racines $x_1 < x_2 < \ldots < x_d$.
   Montrer que si Q est un polynôme de degré d suffisamment proche de P (si les coefficients sont suffisamment proches de ceux de P), alors Q est scindé à racines simples.
2. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   (a) On suppose que les coefficients de P sont bornés par M. Expliciter une constante K dépendant uniquement de M et d telle que toutes les racines de P soit de module $\leq K$.
   (b) Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes unitaires de même degré d tendant (coefficient par coefficient) vers P. On note $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{d,n}$ les racines de Q_n comptées avec multiplicité. Montrer que si aucun des Q_n n'est scindé à racines simples, P n'est pas scindé à racines simples.
   Conclure.

… et $\varepsilon > 0$

Exercice 7 🪶 Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 8 ★ Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 9 🪶 Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Dans cette question, on suppose f croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
   (a) Pour $\varepsilon > 0$, justifier que $\left|\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^{1} f(t^n)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Montrer que $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. ★ Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.
   (Utilise la fin du chapitre)

Continuité

Exercice 10 🏠 On considère les fonctions $f\colon x \mapsto \sin(x)\sin\frac{1}{x}$ et $g\colon x \mapsto \cos x \cos \frac{1}{x}$.

1. Justifier que f et g sont continues.
2. Sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11 Soient f, g deux fonctions continues.

1. Pourquoi la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est-elle continue ?
2. En déduire que la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est continue.

Exercice 12 🪶 Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. Justifier l'existence d'un plus petit zéro de f.

Exercice 13 Montrer que la fonction

$$f\colon x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

est discontinue en tout point.

Exercice 14 Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue en 0 vérifiant $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x)$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(\frac{x}{2^n})$
2. Montrer que f est constante.

Exercice 15 ★ Soit $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\varphi\colon x\mapsto \sup\limits_{[0,x]} f$ est continue.

Relèvement continu

Exercice 16

1. Que dire d'une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$? Justifier.
2. Soient f et $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que $\forall t\in\mathbb{R}$, $e^{if(t)}=e^{ig(t)}$. Montrer que $f-g$ est constante.

Exercice 17 ★

1. Quels sont les morphismes continus $f\colon (\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},+)$?
2. Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{U}$ un morphisme continu. Une fonction $\tilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=e^{i\tilde{f}(x)}$ est appelé un relèvement de f.
   (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ et un relèvement continu $\tilde{f}$ de f défini sur $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique relèvement continu $\tilde{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifie $\tilde{f}(0)=0$.
   (c) Montrer que $\tilde{f}$ est un morphisme de groupe.
   (d) En déduire quels sont les morphismes de groupes continus $\mathbb{R}\to\mathbb{U}$.

Fonctions continues

Exercice 18 Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$ et $f(x)\xrightarrow[-\infty]{}-\infty$. Montrer que f est surjective.

Exercice 19 Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue T-périodique.

1. Justifier brièvement que $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in[0,T],\ f(x)=f(y)$.
2. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 20 Soit $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{b-a}$.

Exercice 21 Soit $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 22 Soit $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $f([a,b])\subset[a,b]$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On suppose que $[a,b]\subset f([a,b])$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 23 Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que si f positive et $\ell=0$ en $+\infty$, f admet un maximum.

Exercice 24 On considère le polynôme $P(X)=X^3+aX^2+1$, où $a\in\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles P admet trois racines réelles α,β,γ vérifiant $-1<\alpha<0<\beta<1<\gamma$.

Exercice 25 Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue, et $\alpha>0$ telle que $\forall x\geq 0,\ |f(x+1)-f(x)|\leq\alpha$. Montrer qu'il existe $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $\forall x\geq 0,\ f(x)\leq ax+b$.

Exercice 26 ★ [ENS 2022] Déterminer les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues et bornées telles que

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{2}\big(f(x+1)+f(x-1)\big)\geq f(x)$.
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{4}\big(f(x+1)+f(x-1)+f(x+\pi)+f(x-\pi)\big)=f(x)$.

Continuité uniforme

Exercice 27 Montrer que $x\mapsto\sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 28 Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $\pm\infty$. Montrer que f est UC.

Exercice 29 ★ Lemme de croft Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x>0,\ f(nx)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

1. On suppose que f est uniformément continue, montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.
2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $0<\alpha<\beta$ deux réels. Montrer que $\bigcup\limits_{p\geq n}]p\alpha,p\beta[$ contient tous les réels assez grands.
   (b) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ouverte et non majorée. Montrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\{n\alpha,\ n\in\mathbb{N}\}\cap A$ soit infini.
   A ouverte : $\forall x\in A,\exists\varepsilon>0,\ ]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset A$.
   (c) Montrer que la conclusion de 1) reste vraie sans l'hypothèse d'uniforme continuité.