# TD Théorie de la dimension

## Espaces vectoriels

**Exercice 1** Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ et $F_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

1. Quelles sont les dimensions de $F_1$ et $F_2$. Justifier.
2. Déterminer $F_1 + F_2$.
3. En remarquant que $\begin{pmatrix}1\\8\\-9\end{pmatrix} \in F_1 \cap F_2$, déterminer $F_1 \cap F_2$.

**Exercice 2** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $0 < p < n$ et $G$ un supplémentaire de $F$ dans $E$.

1. Soit $a \in F$ et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $G$.
   a) Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $f_i = a + e_i$. Montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ est libre.
   b) Soit $G_a = \operatorname{Vect}(a + e_i)_{i \leq r}$. Montrer que $E = F \oplus G_a$.
2. a) Soient $a, b \in F$. Montrer que $G_a = G_b \Rightarrow a = b$.
   b) En déduire que $F$ admet une infinité de supplémentaires distincts.

**Exercice 3** Soit $E$ de dimension $n$

1. Soit $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions $p$ et $q$. Montrer que $p + q - n \leq \dim(F \cap G) \leq \min(p, q)$
2. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$ de dimensions $n_i$. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} n_i - n(p-1) \leq \dim\big(\bigcap_{i=1}^{p} F_i\big)$.

**Exercice 4** L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet-il une base formée de matrices inversibles ?

### De polynômes

**Exercice 5** Montrer que $1 + X, X + X^2, \dots, X^{n-1} + X^n, X^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

**Exercice 6** Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = P(2)\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = P(3) = 0\}$.

1. Montrer que $F$ et $G$ sont en somme directe.
2. Donner une paramétrisation simple de $G$. En déduire la dimension de $G$, puis un supplémentaire de $G$.
3. $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 7** Soit $a \neq b \in \mathbb{R}$, et $n \geq 1$. Montrer que la famille des $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

**Exercice 8** ★ Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie $(n+1)$.

1. Montrer qu'il existe une base de $F$ formée de polynômes ayant le même degré.
2. Montrer qu'il existe une base de $F$ formée de polynômes de degrés deux à deux distincts

### En dimension infinie

**Exercice 9**

1. On note $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des suites $p$-périodiques. Quelle est sa dimension ? Justifier.
2. Montrer que $\left((\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{\omega \in \mathbb{U}_p}$ est une base de $\mathcal{P}_p$.
3. Déterminer une base de l'ensemble $\mathcal{P}$ des suites périodiques.

**Exercice 10** ★ En admettant l'existence d'une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ qui ne soit pas linéaire.

## Applications linéaires

### Images et noyaux

**Exercice 11** On considère l'endomorphisme $u\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, la restriction $u_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto u(P)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose déterminer l'image de $u_n$ par deux méthodes différentes.
   a) Déterminer le noyau de $u_n$. En utilisant le théorème du rang, en déduire que $\operatorname{Im} u_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   b) En utilisant que $\forall k \in [\![1, n]\!], \deg u(X^k) = k - 1$ et que $u(1) = 0_{\mathbb{R}[X]}$, montrer directement que $u(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. a) Montrer que $u$ est surjective.
   b) On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$. Montrer que $u$ réalise un isomorphisme de $F$ sur $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 12** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

*(i)* $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$ *(ii)* $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$ *(iii)* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$

*(iv)* ★ Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u + v$ soit inversible et $u \circ v = 0$.

**Exercice 13** ♣ Noyaux itérés Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère $F_n = \ker f^n$ et $G_n = \operatorname{Im} f^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset F_{n+1}$ et $G_{n+1} \subset G_n$.
2. a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k = G_{k+1}$. En déduire que pour tout $i \geq k, G_i = G_{i+1}$.
   b) Montrer que $\forall i \geq k, F_i = F_{i+1}$.
3. Montrer que $F_k$ et $G_k$ sont supplémentaires.
4. Montrer que $f$ induit un isomorphisme sur $G_k$ et une application nilpotente sur $F_k$.

### Et familles de vecteurs

**Exercice 14** Soit $u\colon E \to F$ une application linéaire injective, et $G$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$. Montrer que $u(G)$ est de dimension $p$.

**Exercice 15** Soit $E$ un espace de dimension finie paire. Montrer qu'il existe un endomorphisme $u$ de $E$ tel que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

**Exercice 16** ✎ Endomorphisme cyclique Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

1. Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $f^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$.
2. Montrer que $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

### Rang

**Exercice 17** Quel est le rang de l'application $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par $\varphi(A) = E_{11}A$ ?

**Exercice 18** ♣✎ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ où $E, F, G$ sont de dimension finie. Montrer que

$$\operatorname{rang}(g \circ f) = \operatorname{rang} f - \dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g).$$

**Indication** : *Appliquer le théorème du rang, à une restriction judicieuse.*

**Exercice 19** ✎ Soient $u, v$ deux endomorphismes de $E$ de dimension finie.

1. ♣ Montrer que $\operatorname{rang}(u + v) \leq \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$.
2. Montrer que $|\operatorname{rang} u - \operatorname{rang} v| \leq \operatorname{rang}(u + v)$.
3. On suppose $E = \mathbb{R}^2$.
   a) Donner un exemple où $\operatorname{rang}(u + v) < \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$.
   b) Donner un exemple où $\operatorname{rang}(u + v) = \operatorname{rang} u + \operatorname{rang} v$.

### Isomorphismes

**Exercice 20** ✎ Interpolation de Hermite Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels distincts, ainsi que $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $\forall 1 \leq i \leq n,\ P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$.
2. Décrire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall 1 \leq i \leq n,\ P(x_i) = a_i$ et $P'(x_i) = b_i$.

**Exercice 21** Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel contenant $I_n$ et stable par multiplication. Soit $A \in \mathcal{A}$ une matrice inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{A}$.
**Indication** : *Considérer une certaine application linéaire* $m\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

## Formes linéaires, hyperplans

**Exercice 22** Montrer que toute forme linéaire non nulle est surjective.

**Exercice 23** Soit $E$ un espace vectoriel et $\varphi, \psi\colon E \to \mathbb{K}$ deux formes linéaires, avec $\psi \neq \tilde{0}$. Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

**Exercice 24**

1. On considère la courbe paramétrée $M(t) = (t, t^2, \dots, t^n)$. Montrer qu'elle ne rencontre un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ qu'en au plus $n$ points.
2. Montrer que $\mathbb{R}^n$ n'est pas la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stricts.

**Exercice 25** ★ ♣ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ des formes linéaires.

1. Montrer que $\operatorname{rang}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) = \operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\varphi_i$. *La codimension est* $\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$.
   **Indication** : *Se ramener à une famille libre et considérer l'application* $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.
2. En déduire que pour $\psi$ une forme linéaire, $\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \varphi_i \subset \operatorname{Ker} \psi \Leftrightarrow \psi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.

**Exercice 26** ★ ★ Soient $f_1, \dots, f_k$ des formes affines sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre

$(i)$ le système $f_i(x) \geq 0$ pour $1 \leq i \leq k$ n'admet aucune solution.

$(ii)$ il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{k=1}^{k} \lambda_i f_i = -1$.

**Indication** : *Extraire une base de l'espace engendré par les parties linéaires des* $f_k$.