TD Séries numériques

Comparaisons

Exercice 1 Déterminer la nature de la série, en fonction du paramètre.

1. $\sum n^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\sum \frac{\lambda^n}{1+\lambda^n}, \lambda > 0$
3. ★ $\sum \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1\right)^a$

Exercice 2 Natures des séries de terme général

1. $\sqrt{\cosh \frac{1}{n} - 1}$
2. $\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n}$
3. $\cos\left(\frac{\pi n}{2(n+1)}\right)$
4. ★ $\arccos \frac{n}{n+1}$

Exercice 3 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $\sqrt{n}\ln(1+\frac{1}{n^2})$
2. $\sqrt{n^2+1} - n$
3. $\ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$
4. $\frac{\cosh n}{\cosh 2n}$
5. $\frac{\ln n}{n^2}$
6. $\frac{n}{2^n}$
7. $\frac{1}{(\ln n)^2}$
8. $e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 4 Nature de

1. $\sum \left(\cos \frac{1}{n}\right)^n$
2. $\sum n^{1/n} - n^{1/(n+1)}$
3. $\sum \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$
4. $\sum \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^{\alpha}}$

Exercice 5 Donner une CNS sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la série de terme général $a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n-1}$ converge. Dans ce cas, quelle est sa somme ?

Sommes

Exercice 6 Justifier la convergence et calculer

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Exercice 7 Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n}$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 8 On considère la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Justifier la convergence de $\sum \frac{F_n}{3^n}$.
2. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{3^n}$.

Exercice 9

1. Trouver les fonctions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues vérifiant $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n} f(x^n)$.
2. Trouver les fonctions $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues vérifiant $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} f(x^n)$.

Exercice 10 Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

1. Justifier la définition de f.
2. Montrer que la fonction f est concave.
3. En déduire que f est continue.
4. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 11 Développement en série entière d'une fonction absolument monotone

Soit $f\colon [0,b[\to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \geq 0$. On note $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et $S_n\colon x \mapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0,b[,\ S_n(x) = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,\mathrm{d}u$. En déduire que S_n est croissante sur $]0,b[$.
2. ★ Soit $x \in [0,b[$. En considérant $c \in]x,b[$, montrer que $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   On en déduit que f est DSE en 0, c'est-à-dire $\forall x \in [0,b[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Exercice 12 ★ Montrer que tout réel $x \in [0,1[$ peut s'écrire de manière unique $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$, avec une suite (a_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall n_0, \exists n \geq n_0,\ a_n \neq n-1$.

Liens suite/série

Exercice 13 On considère une suite définie par $u_0 \in]0,\pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. *On rappelle que* $u_n \to 0$.

1. À l'aide de $\sum (u_{n+1} - u_n)$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
2. À l'aide de $\ln(u_{n+1}) - \ln u_n$, montrer que $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 14 Développement asymptotique de la série harmonique et applications.

1. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe une constante γ telle que $H_n = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$.
2. Justifier la convergence de la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. En exprimant S_n en fonction de H_{2n} et H_n. Déterminer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 15 ★ Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^{\alpha}}$.

STPs

Exercice 16 Soit (u_n) une suite réelle. On suppose u_n positive. Montrer que la série $\sum u_n$ a la même nature que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$

Exercice 17 Soit $\sum a_n$ une série positive convergente.

1. Montrer que $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. Réciproque ?
2. Montrer que pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n^{\alpha}}$ converge.

Exercice 18 Soit (u_n) une suite décroissante positive dont la série converge. On note (S_n) la suite des sommes partielles.

1. Déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de $S_{2n} - S_n$.
2. En déduire que $u_{2n} = o(\frac{1}{n})$, puis que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

Exercice 19 Déterminer la nature des séries suivantes, où c_n est le nb de chiffres décimaux de n,

1. $\sum \frac{1}{c_n^{c_n}}$
2. $\sum \binom{2n}{n}^{-1}$
3. $\sum \frac{4^n}{n} \binom{2n}{n}^{-1}$

Exercice 20 ★ Soit (a_n) une suite réelle positive.
On suppose que $\sum a_n$ diverge, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

1. Montrer que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge. **Indication** : *Adapter une démonstration de la divergence de* $\sum \frac{1}{n}$.
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.
3. Montrer que $\sum \frac{a_n}{S_n^{1+\delta}}$ converge pour tout $\delta > 0$.

   Indication : *Considérer la série* $\sum \left(\frac{1}{S_{n-1}^\delta} - \frac{1}{S_n^\delta} \right)$, *ou les intégrales* $\int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{t^{1+\delta}} \, \mathrm{d}t$.

Exercice 21 ★ Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$.

1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$?
2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$?

Le chapitre sur les familles sommables trivialisera ces deux questions : pour des STPs, l'ordre de sommation n'a pas d'importance.

3. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Comparaisons intégrales

Exercice 22 [Banque CCP MP] Séries de Bertrand On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la nature de $\sum u_n$ dans le cas $\alpha \leq 0$.
2. En utilisant la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$, déterminer la nature de $\sum u_n$ dans le cas $\alpha > 0$.

Exercice 23

1. Équivalent, quand $n \to +\infty$, de $S_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{k}$.
2. Équivalent, quand $n \to +\infty$, de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Exercice 24 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{[n,n+1]} |f'|$.
2. Montrer que $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_n^{n+1} |f'|$.
3. ★ On pose $e_n = \sup_{[n,n+1]} |f'|$, montrer que si $\sum e_n$ converge, la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t) \, \mathrm{d}t \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même nature.
4. ★ Nature de $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$ et $\sum \frac{\sin \ln n}{n}$.

Exercice 25 ★ Équivalent de la fonction zeta Déterminer un équivalent simple, quand $s \to 1^+$, de $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

À termes quelconques

Exercice 26 Nature de

1. $\sum \sin(n\pi + \frac{1}{n})$
2. $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$
3. $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$
4. $\sum \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$

Exercice 27 Discuter, en fonction de $\alpha, \beta > 0$, de la nature de

1. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha (1 + (-1)^n n^\beta)}$
2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha (1 - n^\beta)}$

Exercice 28 Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \to 0$.

1. Montrer que la nature de $\sum u_n$ est la même que celle de $\sum u_{2n} + u_{2n+1}$.
2. Nature de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$.

Exercice 29 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Justifier soigneusement la définition de f.
2. Déterminer la limite de $f(x)$, quand $x \to +\infty$.
3. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+x)(2n+x+1)}$.
4. En déduire un équivalent de $f(x)$, quand $x \to +\infty$.

Exercice 30 Nature de $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 31 Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose qu'il existe $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\arg z_n| \leq \alpha$. Montrer que $\sum z_n$ et $\sum |z_n|$ ont la même nature.

Exercice 32 ★ Soit $\alpha > 0$ et $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Étudier la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 33 ★ [X] Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente.

1. Montrer que $\sum |x_n|^p$ converge pour tout réel $p \geq 1$
2. Limite, quand $p \to +\infty$, de $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^p| \right)^{1/p}$.

   Indication : *Il faut déjà savoir traiter le cas d'une somme finie : quelle est la limite, quand* $p \to +\infty$, *de* $\left(\sum_{k=1}^m x_k^p \right)^{1/p}$?