TD Groupe symétrique

Groupes

Exercice 1 Montrer que le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ n'admet pas de partie génératrice finie.

Exercice 2

1. Montrer que $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ ne sont pas isomorphes.
2. ★ Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 3 Soit $a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une isométrie affine qui préserve l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des n points d'affixes dans $\mathbb{U}_n$.
On note r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s la symétrie par rapport à l'axe (Ox). L'objectif est de montrer que a peut s'écrire $s \circ r^k$.

1. Montrer que a est linéaire, c'est-à-dire que $a(\vec{0}) = \vec{0}$. **Ind.** : *Une transformation affine préserve les barycentres (les moyennes).*
2. À partir de a, construire une transformation a' préservant $\mathcal{P}_n$ et fixant le point d'affixe 1.
3. En utilisant le fait que a préserve les distances, conclure.

Exercice 4 ★ Soit p un nombre premier, et $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^n}$.

1. Montrer que G est sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Soit H un sous-groupe propre de G, c'est-à-dire un sous-groupe différent de G.
   a) En considérant $z_0 \in G \setminus H$, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H \subset \mathbb{U}_{p^{n_0}}$.
   b) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = \mathbb{U}_{p^n}$.

Exercice 5 ★ Soit G un groupe fini non réduit à $\{1\}$ tel que $\forall a \in G,\ a^2 = 1$.

1. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que G est de cardinal pair.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.

Calcul dans le groupe symétrique

Exercice 6

1. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 4 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
   b) Déterminer l'ordre de σ, c'est-à-dire le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $\sigma^p = \mathrm{Id}$.
2. Écrire les cycles $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2\ 3\ 4)$ comme produits de 2 et 3 transpositions, respectivement.

Exercice 7 Expliciter sans justifier une permutation σ d'ordre 30 dans $\mathcal{S}_{10}$.

Exercice 8 Soit $n \geq 2$ et, dans le groupe $\mathcal{S}_n$, on considère l'application qui à σ associe $\sigma c \sigma^{-1}$, où c désigne le cycle $(1\,2\,\ldots\,n)$. Déterminer l'image de cette application.

Exercice 9 Montrer que les permutations qui commutent avec le cycle $\sigma = (1\,2\,3\,\ldots\,n)$ sont ses puissances.

Exercice 10 ★ [X 2021] À quelle condition une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est-elle un carré ?

Dénombrement

Exercice 11

1. Quel est le nombre de n-cycles dans $\mathcal{S}_n$?
2. Pour $k \geq 2$, quel est le nombre de k-cycles de $\mathcal{S}_n$?

Exercice 12 Soit p premier, quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{S}_{2p}$ d'ordre p ?

Exercice 13 ★ [Mines 2023] On munit $\mathcal{S}_n$ de la probabilité uniforme. Calculer la probabilité π_n que $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ait un cycle de longueur strictement supérieure a $\frac{n}{2}$ dans sa decomposition en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer un equivalent de π_n.

Exercice 14 ★ Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Dénombrer $\mathcal{C}(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{S}_n \mid \sigma\tau = \tau\sigma\}$.

Signature

Exercice 15 On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations de signature 1. Montrer que pour $n \geq 2$, on a $|\mathcal{A}_n| = \frac{1}{2}|\mathcal{S}_n|$.
Indication : *Établir une bijection, entre deux ensembles.*

Exercice 16 Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On pose $f(\sigma) = \prod\limits_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$, et, pour $\tau \in \mathcal{S}_n$, $f_\tau(\sigma) = \prod\limits_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}$.

1. Justifier que $f(\sigma)^2 = \prod_{i \neq j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$, puis que $|f(\sigma)| = 1$.
2. Justifier que $f(\sigma) = (-1)^m$, où m est le nombre de parties $\{i, j\}$ telles que $\sigma(j) - \sigma(i)$ et $j - i$ soient de signes opposés.
3. Soit $\tau \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $f(\sigma) = f_\tau(\sigma)$. En déduire que $f(\sigma \circ \tau) = f(\sigma)f(\tau)$.
4. Montrer que si $\tau = (1\ 2)$, alors $f(\tau) = -1$.
5. Justifier que toutes les transpositions sont conjuguées à $(1\ 2)$, c'est-à-dire que pour toute transposition $(i\ j)$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $(i\ j) = \sigma\tau\sigma^{-1}$.
6. En déduire l'image par f de toute transposition, puis que $f = \varepsilon$.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\sigma\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ définie par $\sigma(x) = x + \overline{2}$.

1. Montrer que σ est bijective.
2. Déterminer les orbites, et la signature de σ. On distinguera deux cas sur n.

Propriétés du groupe $\mathcal{S}_n$

Exercice 18 On note $\mathcal{Z}_n$ le centre de $\mathcal{S}_n$.

1. Déterminer $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$.
2. Soit $n \geq 3$.
   a) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ dont le seul point fixe est i.
   b) En déduire que $\mathcal{Z}_n = \{\mathrm{Id}\}$.

Exercice 19 Soit $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, soit u_σ l'unique application linéaire vérifiant $\forall i,\ u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

1. Expliciter la matrice M_σ canoniquement associée à u_σ, c'est-à-dire vérifiant $\forall i,\ M_\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$.
2. Montrer que $\sigma \mapsto M_\sigma$ est un morphisme de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
3. On considère $\vec{a} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ et $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$. Montrer que $\mathrm{Vect}\,\vec{a}$ et H sont stables par u_σ.
4. ★ Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par tous les u_σ sont $\{\vec{0}\}$, $\mathrm{Vect}\,\vec{a}$, H et $\mathbb{R}^n$.
   Indication : *Si F est stable par tous les u_σ et contient $x \notin \mathrm{Vect}\,\vec{a}$, montrer que F contient un vecteur de la forme $e_i - e_j$.*

Exercice 20

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions de la forme $(1, k)$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions de la forme $(i, i + 1)$.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par $(1, 2)$ et le cycle $(1, 2, \dots, n)$.

Exercice 21 Montrer que pour $n \geq 3$, $\mathcal{A}_n$ est engendré par les cycles de longueurs 3.

Compléments sur les groupes

Exercice 22 Soit $\varphi\colon G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{g \in G_1 \mid \varphi(g) = e_2\}$ est un sous-groupe de G_1.
2. Montrer que φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{e_1\}$.

Exercice 23 Soit G un groupe.

1. Pour $g \in G$, on note $\varphi_g\colon h \mapsto ghg^{-1}$. Vérifier que φ_g est un automorphisme de G.
2. Montrer que l'application $\Phi\colon g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme, de G dans $\big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big)$, le groupe des automorphismes de G. On note $\mathrm{Int}(G)$ son image, qui forme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.
3. Montrer que pour $n \geq 3$, $\mathrm{Int}(\mathcal{S}_n) \simeq \mathcal{S}_n$, c'est-à-dire que les deux groupes sont isomorphes.
   On peut montrer que pour $n \neq 6$, $\mathrm{Int}(\mathcal{S}_n) = \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_n)$.

Exercice 24 Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini, et $x \in G$.

1. Montrer que $\varphi_x\colon g \mapsto xg$ est bijective.
2. En considérant $p = \prod_{g \in G} g$, montrer que l'ordre de x divise $|G|$.

Exercice 25 ★ Lemme de Cauchy Soit $\varphi\colon G \to G'$ un morphisme de groupe. On suppose G fini.

1. Normalité du noyau, et théorème du rang.
   a) Montrer que pour tout $g \in G$, $g\big(\mathrm{Ker}\,\varphi\big)g^{-1} = \mathrm{Ker}\,\varphi$.
   b) Montrer que $|\mathrm{Ker}\,\varphi| \times |\mathrm{Im}\,\varphi| = |G|$.
2. Soit p premier divisant $|G|$ et $\theta\colon G^p \to G^p \quad (x_0, \dots, x_{p-1}) \mapsto (x_{p-1}, x_0, \dots, x_{p-2})$. On note
$$A = \big\{(x_0, \dots, x_{p-1}) \in G^p \mid x_0 x_1 \dots x_{p-1} = e\big\}.$$
   Quels sont les points fixes de θ ? Montrer que $\theta(A) \subset A$. Exprimer $|A|$ en fonction de $|G|$ et p.
3. Pour $X \in G^p$, on pose $\widehat{X} = \{X, \theta(X), \dots, \theta^{p-1}(X)\}$. Soit $q = \Big|\Big\{X \in A \mid \mathrm{Card}\,\widehat{X} = 1\Big\}\Big|$. Montrer que p divise $|A| - q$. En déduire que G admet un élément d'ordre p.

Exercice 26 ★

1. Quels sont les morphismes continus $f\colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$?
2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ un morphisme continu.
   a) Montrer qu'il existe un unique relèvement continu $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\tilde{f}(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{i\tilde{f}(x)}$.
   b) Montrer que $\tilde{f}$ est un morphisme de groupe.
   c) En déduire quels sont les morphismes de groupes $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$.
3. Déterminer les morphismes continus $f\colon \mathbb{U} \to \mathbb{C}^*$.