TD Matrices

Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 Soient $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la projection sur $\operatorname{Vect} f_1$ parallèlement à $\operatorname{Vect} f_2$.

1. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(u)$.
2. Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, où $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$.

Exercice 2 Soit $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, u un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$.

1. Pour $\lambda \neq 0$ déterminer la matrice de u dans la base $(\lambda e_1, \lambda e_2, \lambda e_3)$.
2. Pour $\lambda \neq 0$ déterminer la matrice de u dans la base $(e_1, \lambda e_2, \lambda^2 e_3)$.
3. Déterminer la matrice de u dans la base (e_3, e_2, e_1).

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\operatorname{Id}_E$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 On considère $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$.

1. Donner une base $\mathcal{B}$ de E.
2. On considère T l'endomorphisme de E défini par $T\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer la matrice de T dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5 Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq \vec{0}_E$. Montrer que $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E et expliciter la forme de la matrice de u dans celle-ci.

Indication : *Pour la liberté, écrire une relation de liaison et composer par u^{n-1}.*

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $2 \operatorname{rang} f \leq \dim E$.
2. Montrer qu'il existe une famille libre $(e_1, \dots, e_r)$ telle que $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_r) \oplus \operatorname{Ker} f = E$.
3. Construire une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} O & O \\ I_r & O \end{pmatrix}$.

Exercice 7 Soit E de dimension finie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère $A = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Montrer que $\dim A = (\dim \operatorname{Ker} u)^2$.

Conjugaison et matrices semblables

Exercice 8 Exemple de diagonalisation On considère la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = -2X$ d'inconnues $X \in \mathbb{R}^3$.
2. Epliciter $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Indication : *Considérer $a\colon X \mapsto AX$. On a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(a) = A$ (pourquoi ?).*
3. Comment trouver une expression explicite de A^n ?

Exercice 9 Diagonalisation On dit que $x \in E$ est un vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si $x \neq \vec{0}$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $m\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire associée.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de m si et seulement s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que PMP^{-1} soit diagonale. *On dit que M ou m est diagonalisable.*
2. Si M est diagonalisable, que dire du rang de M ?

Exercice 10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, et $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect} X$.

1. Montrer que si $MX \neq 0$, M est semblable à une matrice λE_{11}.

   Indication : *Il s'agit de construire une base de $\mathbb{R}^n$, dans laquelle la matrice de m est de la forme λE_{11}.*
2. Montrer que si $MX = 0$, M est semblable à E_{12}.
3. Montrer que $M^2 = M \operatorname{Tr} M$
4. Retrouver ce résultat en justifiant qu'il existe $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tels que $M = XY^T$.

Exercice 11 Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice diagonale par blocs dont la diagonale est formée de n blocs $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

C'est-à-dire trouver une base dans laquelle la matrice de α est diagonale.

Exercice 13 Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ * & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix}$.

Trace

Exercice 14 1. Que dire de la trace d'une projection dans un espace de dimension n ?

2. Que dire de la trace d'une symétrie dans un espace de dimension n ?

Exercice 15 Résoudre l'équation $M + M^T = I_n \operatorname{Tr}(M)$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Indication : *Par condition nécessaire, commencer par déterminer* $\operatorname{Tr} M$.

Exercice 16 Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Quelle est la dimension de $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$?
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\varphi_A : B \mapsto \operatorname{Tr}(AB)$ appartient à E^*.
3. Montrer que pour $\varphi \in E^*$, il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\varphi = \varphi_A$.
4. ★ Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ intersecte $GL_n(\mathbb{K})$.

   Indication : *Utiliser que toute matrice est équivalente à* J_r.

Exercice 17

1. Déterminer la trace de $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M^T$
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminer la trace de $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto MA + AM$.

Exercice 18 ★ Soit $G \subset GL(E)$ un sous-groupe fini et F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. On considère $p_G = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} gpg^{-1}$.

   Montrer que p_G est un projecteur, et que p_G est invariant par conjugaison par G, c'est-à-dire que $\forall g \in G,\ gp_Gg^{-1} = p_G$.
2. Montrer que F admet un supplémentaire stable par G.

Exercice 19 ★ [Centrale] Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle.
   a) Montrer que A est semblable à une matrice M telle que $m_{11} = 0$.
   b) Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre (i) : $\operatorname{Tr} A = 0$ et (ii) : $\exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = UV - VU$.

Exercice 20 ★ Théorème de Brauer Montrer que $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation M_σ et $M_{\sigma'}$ sont conjuguées. **Indication** : *En termes de leurs orbites, à quelle condition* σ *et* σ' *sont-elles conjuguées ?*

Rang et matrices équivalentes

Exercice 21 Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_i + b_j)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter du rang de A.

Exercice 22

1. Soit $r < n$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B + \lambda J_r$ soit inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B + \lambda A$ soit inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 23

1. Discuter, selon $a \in \mathbb{C}$, du rang de $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} M_a$ et $\operatorname{Im} M_a$.

Exercice 24 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, et $B \neq O_N$ commutant avec A. Montrer que $\operatorname{rang}(AB) < \operatorname{rang} B$.

Indication : $\operatorname{Im} B$ *est stable par* A.

2. Soient $A_1, \ldots, A_n$ nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, commutant deux à deux. Montrer que $A_1 \ldots A_n = O_n$.

Exercice 25 Soit E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer le rang de $\varphi : v \mapsto u \circ v$.

Exercice 26 Décomposition LU Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ dont toutes les sous-matrices carrées $(a_{ij})_{i,j \leq p}$ sont inversibles. Montrer que A s'écrit de manière unique comme un produit LU, où L (pour «lower») est une matrice triangulaire inférieure dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et U (pour «upper») est une matrice triangulaire supérieure inversible. Vérifier la réciproque.

Exercice 27 ★ Liberté d'une famille de fonctions Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f_1, \ldots, f_n$ des éléments de E. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans E si et seulement s'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.

Matrices par blocs

Exercice 28 Soit E de dimension paire $n = 2p$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre (i) : $f^2 = 0$ et $\operatorname{rang} f = p$; (ii) : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$ et (iii) : l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 29 Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est inversible ssi A et B le sont.
2. Montrer que $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.

Exercice 30 ★ Soit $N = \begin{pmatrix} M & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $M \in GL_p(\mathbb{K})$ est inversible. Montrer que $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} N$ si et seulement si $D = BM^{-1}C$. **Indication** : *Se ramener au cas où* $C = O$ *par une méthode de pivot par blocs.*