

TD Variables aléatoires

Évènements et indépendance

RIB Exercice 1 Soient X, Y indépendantes, de même loi à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = i) = p_i$.

1. Que vaut $\mathbf{P}(X \neq Y)$?
2. Montrer que $\mathbf{P}(X \neq Y) \leq \frac{n-1}{n}$.

NGQ Exercice 2 Soit X_n une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbf{P}(X_1 \geq \alpha) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(S_n \geq n\alpha) > 0$$

IVR Exercice 3 Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. Un nombre N de personnes montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée, où N est une variable aléatoire. Chaque personne choisit un étage auquel elle descend selon une loi uniforme et de manière indépendante des autres. On note S le nombre d'arrêts que l'ascenseur va effectuer, c'est-à-dire $S = |\{X_1, \dots, X_N\}|$.

1. Justifier soigneusement que $\mathbf{P}(S = j \mid N = k) = P(|X_1, \dots, X_k| = j)$. **Ind :** Utiliser la définition $P(A \mid B) = \dots$
2. Établir une relation entre $\mathbf{P}(S = j \mid N = k + 1)$, $\mathbf{P}(S = j \mid N = k)$ et $\mathbf{P}(S = j - 1 \mid N = k)$.

V3W Exercice 4 Soit U_1, \dots, U_n des variables indépendantes de loi uniforme sur $\llbracket 1, p \rrbracket$. On note $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} (U_k)$.

1. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, calculer $\mathbf{P}(M_n \leq k)$. En déduire la loi de M_n .
2. On admet que pour $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f(\frac{k}{p}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{E}(M_n)}{p} = \frac{n}{n+1}$.

UXS Exercice 5 Soit A (respectivement B) une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (respectivement $\{-1, 1\}$). On note $p_n = \mathbf{P}(A \in GL_n(\mathbb{R}))$ et $q_n = \mathbf{P}(B \in GL_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $\forall n \geq 1, p_n = q_{n+1}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1, p_n \geq \prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{2^i})$.

Couples de variables aléatoires

W3A Exercice 6 Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $Z = (X, Y)$ une variable suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket$. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes, et suivent des uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $\llbracket 1, m \rrbracket$.

AK4 Exercice 7 Un étudiant répond à un QCM de 20 questions, chacune avec 4 réponses possibles et une seule correcte. Il répond à toutes les questions au hasard. Dans un second temps, on lui indique quelles sont ses réponses fausses, et il réessaye une des trois réponses restantes au hasard. On note X_1 et X_2 les nombres de réponses correctes au premier essai et au second essai (uniquement).

1. Loi de X_1 .
2. Loi de (X_1, X_2) .
3. Loi de X_2 .
4. Loi de $X_1 + X_2$.

AK3 Exercice 8 Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ deux variables indépendantes.

1. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbf{P}(X + Y = \ell)$ comme une somme, et en donner la valeur.
2. Pour $1 \leq k \leq n + m$, exprimer la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$ comme une somme. Puis en calculer la valeur.

WBL Exercice 9 On lance deux dés. On note X, Y le min et max et des deux résultats. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) et en déduire la loi de chacun.

S90 Exercice 10 Soient X_1, \dots, X_n des variables indépendantes de même loi uniforme sur $\{\pm 1\}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $Y_k = X_1 \dots X_k$. Montrer que les variables Y_1, \dots, Y_n sont mutuellement indépendantes.

Espérance

5Y4 Exercice 11 Soit $Y = \frac{1}{X+1}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

1. Donner une expression de $\mathbf{E}(Y)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k+1} \binom{n}{k}$.
3. Simplifier $\mathbf{E}(Y)$, si $p \in]0, 1[$.

EFY Exercice 12 Soient X, Y indépendantes et $Z = |X - Y|$. Calculer $\mathbf{E}(Z)$

1. si $X, Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2. si $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

VSC Exercice 13 Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_1 = 2) = 1 - p$. On considère $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_k = \min\{n \mid S_n \geq k\}$, le premier indice où la somme dépasse k .

1. Expliciter les images de S_n et Y_k .
2. À l'aide d'une FPT, sur X_1 , établir une relation entre $\mathbf{P}(Y_k = m)$, $\mathbf{P}(Y_{k-1} = m - 1)$ et $\mathbf{P}(Y_{k-2} = m - 1)$.
3. Montrer que la suite $\mathbf{E}(Y_k)$ vérifie une équation de récurrence d'ordre 2. En déduire $\mathbf{E}(Y_k)$.

ASE Exercice 14 Soit A un évènement de probabilité non nulle, et X une variable aléatoire. On définit l'espérance conditionnelle de X comme $\mathbf{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x \mid A)$.

1. Soit A_1, \dots, A_n un s.c.e. de probabilités non nulles. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X \mid A_k) \mathbf{P}(A_k)$.
2. On considère N et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes et $Y = \sum_{i=1}^N X_i$. On suppose que les X_n suivent tous la même loi. Déterminer l'espérance de Y en fonction de celles de N et des X_i .

6UN Exercice 15 Soit X une VA à valeurs dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, d'espérance $k/2$. Donner la meilleure majoration possible de $\mathbf{P}(X > k/2)$.

Indication : Écrire $\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(X \mathbf{1}_{X > k/2})$.

Utilisation de fonctions indicatrices et linéarité de l'espérance

FSE Exercice 16 🍀 On choisit une partie X de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de manière uniforme. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_i l'évènement ($i \in X$).

- Exprimer $|X|$ en fonction des $\mathbf{1}_{A_i}$, en déduire $\mathbf{E}(|X|)$.
- ★ On note $T = \sum_{i \in X} i$. Déterminer $\mathbf{E}(T)$.

D2H Exercice 17 Une urne contient n boules. On effectue n tirages avec remise, et chaque boule tirée est marquée. Quelle est l'espérance du nombre de boules marquées au final? En donner un équivalent, quand $n \rightarrow +\infty$.

GZH Exercice 18 ★ [ORAL X] Soit σ_n une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur S_n .

- Soit L_n la longueur du cycle de σ_n contenant 1. Déterminer l'espérance de L_n .
- Quelle est la probabilité que 1 et 2 soient dans un même cycle de σ_n ?
- On note c_n le nombre de cycles de σ_n . Montrer que $\mathbf{E}(c_n) \sim \ln n$.

QOX Exercice 19 ★ [ORAL X] Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, et on note $N: \omega \mapsto \text{Card}\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n(\omega) = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

- Montrer que $\mathbf{E}(N) = +\infty$.
- Exprimer $\mathbf{P}(N \geq 2)$ en fonction de $\mathbf{P}(N \geq 1)$.
- Montrer que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$.

Variance

DBC Exercice 20 🏠 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher : $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = -1) = 1 - p$. Pour $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- Quelle est l'espérance de S_n ? Sa variance?
- Soit $\lambda > 0$. Quelle est l'espérance de $e^{\lambda S_n}$? Sa variance?

3T6 Exercice 21 🍀 Soit $n \geq 2$ et $p \geq 0$ deux entiers. Un supermarché a n caisses d'ouvertes. Un nombre np de clients se présente aux caisses. Chaque client choisit une caisse au hasard, de manière équiprobable et indépendamment des autres clients. Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i le nombre de client à la caisse i .

- Écrire X_i comme somme de variables indépendantes. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_i .
- Quelle est la variance de $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$?
- En déduire, pour $i \neq j$ la covariance $\text{Cov}(X_i, X_j)$ et le coefficient de corrélation ρ_{X_i, X_j} .

3T7 Exercice 22 [MINES 2023] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$, d'espérance $\mathbf{E}(X) = m \in [a, b]$.

- Montrer que $\mathbf{V}(X) \leq (m - a)(b - m)$.
- Montrer que cette inégalité est optimale.

Indication : Traduire $X \in [a, b]$ par le fait qu'une certaine variable est positive, et utiliser la positivité de l'espérance.

07F Exercice 23 Soit $A = (A_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

- Déterminer l'espérance de $\det A$, puis la variance de $\det A$.
- Montrer qu'il existe une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$, de coefficients ± 1 telle que $\det(A) > 4000$.

XIV Exercice 24 [MINES] Une urne contient b BB et n BN. On les tire toutes, sans remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les BBs.

- Soient $p \leq q$. Montrer que $\sum_{k=p}^q \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
- Déterminer la loi de X , puis son espérance et sa variance.

HP1 Exercice 25 ★ Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de S_n , puis la variance du nombre de points fixes.

Inégalités de contrôle

03I Exercice 26 🍀 INÉGALITÉ DE MARKOV EXPONENTIELLE Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{\alpha X})}{e^{\alpha^2}}$.

TZJ Exercice 27 ♣ LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES Soit (X_i) une suite de variables indépendantes centrées de variances σ_i^2 vérifiant $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = o(n^2)$. Montrer que la suite $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers 0, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$.

HA0 Exercice 28 INÉGALITÉ DE CANTELLI Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.

- Montrer que $\mathbf{E}(|X|)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)$, puis que $\mathbf{E}(|X|)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{P}(|X| > 0)$. **Ind** : $\mathbf{P}(|X| > 0)$ est l'espérance d'une VA.
- On suppose que $\mathbf{E}(Y) \geq 0$ et $\mathbf{E}(Y^2) \neq 0$, montrer que $\mathbf{P}(Y > 0) \geq \frac{\mathbf{E}(Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}$.

Indication : Appliquer la question précédente à une VA judicieuse.

- Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$. En déduire que $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq 2 \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$.

BSU Exercice 29 INÉGALITÉ DE Hoeffding Soient X, X_1, \dots, X_n des v.a. centrées indépendantes à valeurs dans $[-1, 1]$.

- Pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$, montrer que $e^{tx} \leq \frac{(1-x)e^{-t}}{2} + \frac{(1+x)e^t}{2}$. **Ind** : Inégalité de convexité.
- Montrer que $\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \cosh(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. **Ind** : Pour la seconde inégalité, écrire e^x et $\cosh x$ comme des séries.
- On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que $\mathbf{E}(e^{tS}) \leq \exp\left(\frac{t^2 n}{2}\right)$. En déduire que $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right)$.

GAN Exercice 30 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On choisit x uniformément dans l'intervalle $\{1, 2, \dots, n\}$ on note $\mu(x)$ le nombre de diviseurs premiers de x et on considère la variable aléatoire $|B|$ où $B = \{p \text{ premier}, p \leq n^{1/10}, p|x\}$. On admet que $\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} = \ln \ln n + O(1)$

- Montrer que $\mathbf{E}(|B|), \mathbf{V}(|B|) = \ln \ln n + O(1)$.
- Soit f une fonction tendant vers l'infini, déduire de ce qui précède que $\left| \left\{ x \in [1, n], |\mu(x) - \ln \ln x| > f(n) \sqrt{\ln \ln n} \right\} \right| = o(n)$.