TD Fonctions de plusieurs variables

Topologie

Exercice 1 🖋

1. Montrer que l'intersection de deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.
2. Montrer que si $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, la boule ouverte euclidienne $B_2(a,r)$ est convexe.

Exercice 2 Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $f\colon C \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(C)$ est un intervalle.

Exercice 3 ★ Propriété de Borel-Lebesgue dans $\mathbb{R}$ Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement $[0,1]$ par des intervalles ouverts, c'est-à-dire une famille d'intervalles d'ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $[0,1] \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. Montrer qu'il existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire une partie finie $J \subset I$ telle que $[0,1] \subset \bigcup_{i\in J} O_i$.

Exercice 4 ★ Soit X une partie convexe et dense dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $X = \mathbb{R}^n$. Contre-exemple en dimension infinie ?

Exercice 5 ★ [ENS] Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f([a,b])$ soit un segment, pour tout $a \le b$ et $f^{-1}(\{x\})$ soit fermé pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est continue.

Continuité

Exercice 6 🖋 Montrer que les fonctions suivantes sont continues en $(0,0)$.

1. $f\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
2. $g\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{|x|+|y|} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
3. $h\colon (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y^4}{x^2+y^4} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 7 Donner un exemple d'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

1. les applications partielles $x \mapsto f(x,0)$ et $y \mapsto f(0,y)$ soient continues mais f ne soit pas continue en $(0,0)$.
2. f admette en $(0,0)$ des dérivées suivant tout vecteur, mais n'est pas continue en $(0,0)$.
3. les applications $x \mapsto f(x,b)$ et $y \mapsto f(a,y)$ soient continues pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, mais f ne soit pas continue.
   Indication : *Considérer* $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$ *et* $f(0,0) = 0$.

Exercice 8 ★ Opérateur intégral [X 2021] Soient $K\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}_+^*$ et $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continues telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \int_0^1 f(y)K(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad f(x) = \int_0^1 g(y)K(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $f = g$. **Ind** : *Considérer* $\sup \frac{f}{g}$.

Dérivées partielles

Exercice 9 🖋 🏠 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $h\colon (x,y) \mapsto f(2xy, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et donner ses dérivées partielles.

Exercice 10 🖋 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $x, h \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $g(t) = f(x+th) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n)$. Donner une expression de $g'(t)$, d'une part en termes des dérivées partielles de f, d'autre part en termes du gradient de f.

Exercice 11 🖋 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ si et seulement si $\forall t, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+t, y+t) = f(x,y)$.

Exercice 12 🖋 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ y \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 13 Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculer les dérivées partielles de

1. $f\colon (x,y) \mapsto \int_0^y (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$
2. $g\colon (x,y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} \sin(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 14 ★ Unicité au problème de Dirichlet On considère des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$ et continue sur le disque fermé. On définit le laplacien par $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y^2}$.

1. On suppose que $\Delta f > 0$ et que f est nulle sur le cercle unité, montrer que $f \le 0$ sur le disque.
2. On suppose f_1, f_2 coïncident sur le cercle unité et vérifient $\Delta f_1 = \Delta f_2$, montrer que $f_1 = f_2$. **Ind.** : *Étendre Q1 à* $\Delta f \ge 0$.

Gradient

Exercice 15 🖋 Soit I, J des intervalles et $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\sup \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le K$ et $\sup \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L$. Montrer que f est lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $\forall \vec{u}, \vec{v},\ |f(\vec{u}) - f(\vec{v})| \le M \|\vec{u} - \vec{v}\|_2$. Quelle est la constante M optimale ?
Indication : *Introduire une fonction* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui vérifie* $g(0) = f(\vec{u})$ *et* $g(1) = f(\vec{v})$.

Exercice 16 Un lemme de Rolle Soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ continue sur le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur le disque unité ouvert U. On suppose que f est identiquement nulle sur le cercle unité. Montrer qu'il existe $a \in U$ tel que $\operatorname{grad} f(a) = \vec{0}$.

Exercice 17 ★ Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $x \in S$ tel que $g(x) = \max\{g(y),\ y \in S\}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{grad} g(x) = \lambda x$.

Exercice 18 ♣ Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^1$. On dit que f est convexe si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

1. Soit $x, y \in E$, et $g_{x,y}\colon t \in \mathbb{R} \mapsto f(x+ty)$. Montrer que si f est convexe, alors $g_{x,y}$ est convexe.
   Réciproquement, on admet que si toutes les fonctions $g_{x,y}$ sont convexes, f est convexe.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes à la convexité de f.
   (i) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) \geq f(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), y \rangle$.
   (ii) $\forall x, y \in E,\ \langle \operatorname{grad} f(y) - \operatorname{grad} f(x), y - x \rangle \geq 0$.
3. Montrer que si f est convexe et admet un extremum local en a, alors celui-ci est global.
4. On suppose que f est strictement convexe et que $\frac{f(x)}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$.
   a) Montrer que f atteint sa borne inférieure en un unique point.
   b) Montrer que l'application $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$ est bijective.

EDP

Exercice 19 Déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y$

Exercice 20 On dit que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est α-homogène si $\forall t > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)$.

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et α-homogène, alors $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y). \quad (*)$
2. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $(*)$, elle est α-homogène.

Exercice 21 On pose $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $f\colon \Delta \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $(E)\colon y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

1. Interpréter géométriquement (E) en considérant, en $M = (x,y)$, les vecteurs $\operatorname{grad} f(M)$ et $\overrightarrow{OM}$.
2. En posant $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, montrer qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \Delta,\ f(x,y) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Étudier la réciproque.

Exercice 22
1. Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\forall u, v \in \mathbb{R},\ F(u,v) = g(u) + h(v)$.
2. Soient $c > 0$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère l'équation $(E)\colon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$. En utilisant un changement de variable, montrer que si f vérifie (E), il existe $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x, t \in \mathbb{R},\ f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct).$$
3. Déterminer les solutions de (E) de la forme $f(x,t) = F(x)G(t)$, où F et G sont des fonctions bornées, non identiquement nulles, et telles que $\forall x,\ f(x,0) = 0$ et $\forall t,\ f(0,t) = 0$.

Extrema et géométrie

Exercice 23 Soit $f\colon (x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. $(0,0)$ est-il un extremum local ?
3. Montrer que f n'admet pas d'extrema.

Exercice 24
1. Soit $a \in \,]0,\pi[$ vérifiant $\cos(a) + \cos(2a) = 0$. Montrer que $a = \frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer avec soin les extrema de la fonction $f\colon x, y \mapsto \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ sur $K = [0,\pi]^2$.
3. En déduire la valeur maximale du périmètre d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 25 Soit ABC un triangle du plan. On considère $f\colon M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$.

1. Déterminer $\operatorname{grad} f(M)$.
2. Montrer que f admet un minimum, atteint en un unique point, à déterminer.

Exercice 26 [X MP 2023] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique. On considère le carré de coins $\{0,1\} \times \{0,1\}$. On choisit trois points A, B et C sur ce carré.

1. Montrer qu'il existe une disposition des points A, B et C maximisant l'aire du triangle ABC.
2. Caractériser une telle disposition.

Exercice 27 Soit $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Montrer que f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 28 Soit $f\colon (x,y) \mapsto \sin x\, \sin y\, \sin(x+y)$.

1. Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer ce maximum.

Exercice 29 ★ [Mines 2022] Soit $f\colon \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.
2. Extrema de f.

Exercice 30 ★ Preuve différentielle du théorème spectral Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $h\colon X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \mapsto \frac{\langle AX, X\rangle}{\|X\|_2^2}$.

1. Montrer que h admet un maximum ou un minimum.
2. En déduire que S admet une valeur propre : il existe $X \neq \vec{0}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $SX = \lambda X$.