TD Familles sommables

Dénombrabilité

Exercice 1 Expliciter une injection $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Exercice 2 ♣ Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie.

Exercice 3

1. Montrer qu'une réunion dénombrable de parties finies est finie ou dénombrable, c'est-à-dire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties finies de E, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est finie ou dénombrable.
2. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.
3. En déduire qu'il existe des nombres réels transcendants, c'est-à-dire des réels qui ne sont racines d'aucun polynôme à coefficients entiers.

Exercice 4 ★ On considère $G = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(\pi n! x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que tout réel $x \in [0,1[$ peut s'écrire de manière unique $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$, avec une suite (a_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in [\![0, n-1]\!]$ et $\forall n_0, \exists n \geq n_0$, $a_n \neq n-1$.
3. Avec les notations de la question précédente, montrer que $x \in G$ si et seulement si $\min(\frac{a_n}{n}, 1 - \frac{a_n}{n}) \to 0$.
4. En déduire que G est non dénombrable.

Exercice 5 ★ On considère des tripodes dans le plan. Un tripode est constitué des 3 segments joignant les sommets d'un triangle équilatéral à son centre. On suppose que les tripodes ne s'intersectent pas. Montrer qu'il y a au plus un nombre dénombrable de tripodes.

Familles positives

Exercice 6 Sommabilité et somme de $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{p,q\geq 2}$.

Exercice 7 Discuter de la sommabilité de $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{n,m\geq 1}$.

Exercice 8 On pose, pour $p, q \geq 1$, $u_{p,q} = \left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)^2$.

1. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence de $S_q = \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q}$.
2. Montrer que, pour $a > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\int_0^x \frac{1}{(t^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{a^3}\frac{\pi}{2}$.
   Indication : *Poser* $t = a\tan u$.
3. À l'aide d'une comparaison série intégrale, déterminer un équivalent de S_q.
4. Sommabilité de $(u_{p,q})$?
5. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ est sommable, et retrouver le résultat précédent directement.

Exercice 9 Sommabilité de

1. $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geq 2}$.
2. $\left(\frac{1}{n^2-m^2}\right)_{\substack{n,m\geq 1\\ n\neq m}}$

Exercice 10 On admet $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

1. $\sum\limits_{p,q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2}$.
2. $\sum\limits_{\substack{p,q\geq 1\\ p\mid q}} \frac{1}{p^2q^2}$
3. ★ $\sum\limits_{\substack{p,q\in\mathbb{N}^*\\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}$.

Exercice 11 Fonction zeta de Riemann On pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que $\zeta(x)$ est fini si et seulement si $x > 1$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 2} \big(\zeta(n) - 1\big) = 1$.
3. Montrer que $\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^x}$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n.

Exercice 12 Soit $\sum a_n$ une série convergente positive, et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que $\sum na_n$ converge si et seulement si $\sum R_n$ converge, et que $\sum na_n = \sum R_n$.

Exercice 13 CNS sur α pour que $\left(\frac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{p,q\geq 1}$ soit sommable.

Exercice 14

1. Existence et valeur de

$$\sum_{p,q\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$$

2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)}$.

Exercice 15 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c(n)$ le nombre de uns dans son écriture binaire. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c(n)}{n(n+1)}$

Exercice 16 ★ Soit A l'ensemble des entiers > 0 dont l'écriture décimale ne contient pas le chiffre 1. Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in A}$ est sommable.

Exercice 17 ★ Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n-1}$.

Termes quelconques

Exercice 18 Montrer que $\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\geq 1}$ est sommable.

Exercice 19 Montrer que $\left(z^{ij}\right)_{i,j\geq 1}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$.

Exercice 20 Soient $a \neq b \in \mathbb{C}$. Sommabilité et somme de $\left(\frac{a^p b^q}{(p+q+1)!}\right)_{p,q\geq 0}$.

Exercice 21 Montrer que $\left(\frac{e^{2ik\pi/n}}{2^n}\right)_{k\geq 1, n>k}$ est sommable, et calculer sa somme.

Exercice 22 Soit $x \in \left]-1,1\right[$. On note H_n la série harmonique.

1. Montrer que $\sum H_n x^n$ converge.
2. Calculer sa somme.

Exercice 23 Déterminer une CNS sur les paramètres pour que la famille soit sommable.

1. $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{p,q\geq 1}$
2. $\left(\frac{a^p b^q}{p!q!}\right)_{p,q\geq 0}$
3. $\left(\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{p,q\geq 0}$.

Exercice 24

1. Décomposer en éléments simples $F = \frac{1}{X(X+1)\ldots(X+n)}$.
2. En déduire que pour $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+n)} = e \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

Exercice 25 Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$. Montrer que

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n$.
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}$

Produits

Exercice 26 Soient $a, b > 0$. Sommabilité et somme de $\left(e^{-ap-bq}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$.

Exercice 27 Montrer que $\forall |z| < 1$,
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

Exercice 28 Soit $|z| < 1$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente, de somme $\frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Exercice 29 On considère $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, et w_n le produit de Cauchy de (u_n) et (v_n).

1. Convergence de $\sum u_n$?
2. Montrer que $\sum w_n$ diverge grossièrement. Commenter.

Exercice 30 ★ [Mines 2022] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p(n)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$. On pose $G\colon t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(n) t^n$.

1. Montrer que $G(t)$ est défini pour $|t| < 1$, puis que $G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.
2. En déduire une expression de $p(n)$, et un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 31 ★

1. Pour $s > 1$, montrer que
$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}.$$
2. En déduire que $\sum \frac{1}{p}$ diverge.