DM n°1

Il y a des indications au dos. Facultatif à partir de l'exercice 4, II.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. On considère l'assertion $(P)\colon \exists n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant 1$.

1. En utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, montrer que pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $x \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ et que pour $1 \leqslant x$, on a $1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x$.
2. On veut montrer (P). On raisonne par l'absurde et on suppose non (P).
   (a) Exprimer formellement l'assertion «(u_n) est croissante à partir du rang 1».
   (b) Simplifier non (P) et en déduire que (u_n) est croissante à partir du rang 1.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant (n-1)u_1$.
   (d) Conclure.
3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant 1$.

Exercice 2. Preuve de Cauchy de l'inégalité arithmético-géométrique. Le but est de montrer l'inégalité arithmético-géométrique : pour $n \geqslant 2$, on a

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+, \quad (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Le terme de droite est appelé la moyenne arithmétique des x_i et le terme de gauche la moyenne géométrique.

1. Démontrer cette inégalité lorsque $n = 2$. À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur x_1, x_2 a-t-on égalité ?
2. Quelle est la valeur maximale du produit de deux nombres réels positifs dont la somme fait 2024 ?
3. Soit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^+$, en utilisant plusieurs fois l'inégalité pour $n = 2$, et en écrivant $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2}$, montrer que
$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geqslant (x_1 x_2 x_3 x_4)^{\frac{1}{4}}.$$
   Quel est le cas d'égalité ? Justifier.
4. Montrer que l'inégalité est vraie pour tout n de la forme $n = 2^p$, $p \in \mathbb{N}^*$.
5. Soit $n \geqslant 2$ et $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$. On considère un $p \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant 2^p$. En posant, pour $n < i \leqslant 2^p$, $x_i = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, déduire de la question précédente l'inégalité arithmético-géométrique pour les $x_1, \dots, x_n$.
6. Démontrer l'inégalité géométrico-harmonique : $\quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1 \dots x_n)^{1/n}.$

Exercice 3. ♣ Équation fonctionnelle de Cauchy. On s'intéresse à l'équation fonctionnelle

$$(E)\colon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

d'inconnue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I. Détermination aux points rationnels.

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (E).

1) Déterminer $f(0)$ et montrer que f est impaire.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.

3) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.

II. Hypothèse de continuité. On rappelle qu'une fonction f est continue en x_0 si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$, et qu'en particulier, si (u_n) est une suite telle que $u_n \to x_0$, alors $f(u_n) \to f(x_0)$.

1) Soit f une solution continue de (E) et $x \in \mathbb{R}$. On admet l'existence d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x. Montrer que $f(x) = xf(1)$.

2) En déduire que les solutions continues de (E) sont exactement les fonctions linéaires.

3) Montrer que si f vérifie (E) et est continue en 0, alors elle est continue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

III. Versions multiplicatives. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue non identiquement nulle (c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0$) vérifiant

$$(F)\colon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) = g(x)g(y).$$

1) Montrer que g ne s'annule pas, puis que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

2) À partir de g, définir une fonction vérifiant (E). En déduire toutes fonctions continues vérifiant (F).

3) Déterminer les fonctions continues $h\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $(G)\colon \forall x, y > 0$, $h(xy) = h(x)h(y)$.

Exercice 4. Nombres de Ramsey. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{K}_n$ le graphe non orienté complet à n sommets, dont toutes les paires de sommets distincts sont reliés par une arête. Un bicoloriage (des arêtes) de $\mathcal{K}_n$, est le choix, pour chaque arête de $\mathcal{K}_n$, d'une couleur : rouge ou bleu.

Pour $p, q \geqslant 1$, on dit qu'un bicoloriage de $\mathcal{K}_n$ vérifie l'assertion $\mathcal{P}_{p,q}$ s'il contient ou bien un sous-graphe $\mathcal{K}_p$ entièrement rouge c'est-à-dire p sommets dont toutes les arêtes les reliant deux à deux soient rouges, ou bien un sous-graphe $\mathcal{K}_q$ entièrement bleu.

On note $\mathcal{R}(p,q)$, s'il existe, le plus petit entier n tel que tout bicoloriage de $\mathcal{K}_n$ vérifie $\mathcal{P}_{p,q}$. Si un tel entier n n'existe pas, on peut convenir que $\mathcal{R}(p,q) = +\infty$.

Si $\mathcal{R}(p,q)$ existe, alors pour tout $n \geqslant \mathcal{R}(p,q)$, tout bicoloriage de $\mathcal{K}_n$ vérifie également $\mathcal{P}_{p,q}$.

I. Premières valeurs.

1) Dessiner $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ et $\mathcal{K}_4$. Combien d'arêtes le graphe $\mathcal{K}_n$ contient-il ?

2) Se convaincre que pour $q \geqslant 1$, $\mathcal{R}(1,q) = 1$, puis déterminer $\mathcal{R}(2,q)$ pour $q \geqslant 2$ (justifier soigneusement).

3) ★ On considère un bicoloriage de $\mathcal{K}_6$. Montrer qu'il un triangle unicolore. En déduire que $\mathcal{R}(3,3) = 6$.

Les nombres de Ramsey sont notoirement difficiles à calculer. La citation suivante, due au mathématicien Paul Erdös en 1990, reste d'actualité : «Suppose aliens invade the earth and threaten to obliterate it in a year's time unless human beings can find the Ramsey number for red five and blue five. We could marshal the world's best minds and fastest computers, and within a year we could probably calculate the value. If the aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, however, we would have no choice but to launch a preemptive attack.»

II. Théorème de Ramsey. Soient $p, q \geqslant 2$ tels que $\mathcal{R}(p-1,q)$ et $\mathcal{R}(p,q-1)$ existent, et $n = \mathcal{R}(p-1,q) + \mathcal{R}(p,q-1)$.

On considère un bicoloriage de $\mathcal{K}_n$ et un sommet s quelconque de $\mathcal{K}_n$. On note R l'ensemble des sommets de $\mathcal{K}_n$ reliés à s par une arête rouge, et B ceux reliés à s par une arête bleue.

1) Justifier que $|R| \geqslant \mathcal{R}(p-1,q)$ ou $|B| \geqslant \mathcal{R}(p,q-1)$.

2) En déduire que $\mathcal{K}_n$ contient ou bien un sous-graphe $\mathcal{K}_p$ entièrement rouge, ou bien un sous-graphe $\mathcal{K}_q$ bleu.

3) Déduire soigneusement de ce qui précède le théorème de Ramsey : pour tout $p, q \geqslant 1$, le nombre $\mathcal{R}(p,q)$ existe.

Exercice 5. ★

1. Soit C un carré de $\mathbb{R}^2$ centré en $(0,0)$, de côté $4n+2$. On note $M(n)$ le nombre maximal de disques de rayon 1 disjoints que l'on peut placer dans C. Montrer que
$$(2n+1)^2 \leqslant M(n) \leqslant \frac{4(2n+1)^2}{\pi}$$
2. Soit B_r le disque de rayon r de centre $(0,0)$ et $\varepsilon > 0$. On considère $P(\varepsilon)$ le nombre maximal de points que l'on peut mettre dans B_r de sorte qu'ils soient deux à deux distants d'au moins ε. Montrer que
$$P(\varepsilon) \leqslant \left(1 + \frac{2r}{\varepsilon}\right)^2.$$
3. Soit B le disque de rayon 1 de centre $(0,0)$ et $\varepsilon > 0$. On considère $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de disques de rayon ε nécessaires pour recouvrir B. Montrer que
$$\frac{1}{\varepsilon^2} \leqslant N(\varepsilon) \leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^2.$$
4. Soit $S(n)$ le nombre de couples $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $x^2 + y^2 \leqslant n^2$. Montrer que $\frac{S(n)}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi$.

Indications Exercice 1.

2. **(b)** Procéder par récurrence.
   (c) Récurrence également, mais le raisonnement naturel pour l'hérédité n'est valable que pour $n \geqslant 2$.

Indications Exercice 2.

1. Écrire l'inégalité recherchée, et la manipuler par équivalences.
4. Par récurrence. Pour comprendre l'idée, on pourra chercher à démontrer l'inégalité pour $n = 4$, en utilisant l'inégalité pour $n = 2$.
6. Il suffit d'appliquer l'inégalité arithmético-géométrique déjà démontrée à n nombres bien choisis.

Indications Exercice 3.

I. 3) Écrire $r = \frac{p}{q}$, puis $q\,r = p$, et utiliser la question précédente.

II. 3) Écrire $f(x) = f(x_0) + f(x - x_0)$.

III. 1) Supposer par l'absurde que g s'annule.

2) On transforme des produits en somme avec la fonction logarithme.

Indications Exercice 4.

I. 2) On trouve $\mathcal{R}(2,q) = q$. La justification fait intervenir deux parties : d'une part $\mathcal{R}(2,q) \leqslant q$, d'autre part $\mathcal{R}(2,q) \geqslant q$

3) Considérer un sommet quelconque s. Parmi les 5 arêtes issues de s, il y en a au moins trois qui ont la même couleur.

II. 3) Procéder ou bien par «récurrence sur $p+q$», ou bien montrer que $\forall p, \forall q, \mathcal{R}(p,q)$ existe par deux récurrences imbriquées.

Indications Exercice 5.

2. On veut utiliser la propriété suivante : si des domaines A_i disjoints sont inclus dans un domaine B, la somme des aires des A_i est inférieure à l'aire de B.
3. Pour majorer N, utiliser la question précédente.