DM n°2

Exercice 1. On considère l'application de Collatz, définie par $\quad \mathrm{Col}\colon \begin{array}{ccl} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ N & \mapsto & \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{si } N \text{ pair} \\ 3N+1 & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \end{array}$.

On note Col^n la composée n-ième de l'application Col.

1. Déterminer $\mathrm{Col}^i(14)$, pour $i \in [\![0,5]\!]$.
2. Montrer que Col n'est pas injective.
3. Montrer que Col est surjective.

Exercice 2. Soit E un ensemble.

I. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathcal{F}$ est stable par intersection si $\forall A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B \in \mathcal{F}$.

1) On prend $n \geqslant 1$, $E = [\![1,n]\!]$, et $\mathcal{F} = \{A \subset E \mid 1 \in A\}$. Justifier que $\mathcal{F}$ est stable par intersection.

2) On prend $n \geqslant 3$, $E = [\![1,n]\!]$, et $\mathcal{F} = \{A \subset E \mid \mathrm{Card}\, A \text{ est divisible par } 2\}$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair. La famille $\mathcal{F}$ est-elle stable par intersection ?

3) Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux familles stables par intersection. Montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est stable par intersection.

4) On note $\mathcal{F}^d = \{\overline{A},\ A \in \mathcal{F}\}$. Montrer que $\mathcal{F}^d$ est stable par réunion.

II. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On suppose que $\mathcal{F}$ est stable par intersection.

1) Montrer que pour $n \geqslant 1$, et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, on a $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

2) ★ Donner un exemple d'une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ stable par intersection et d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \in \mathcal{F}$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \notin \mathcal{F}$.

La conjecture suivante est un problème ouvert : Pour toute famille $\mathcal{F}$ non triviale et stable par réunion d'ensembles finis, il existe un élément appartenant à au moins la moitié des ensembles de $\mathcal{F}$. Ou de manière équivalente, pour toute famille stable par intersection, il existe un élément qui appartient à au plus la moitié des ensembles.

Exercice 3. On cherche à déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient

$$(E)\colon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(f(x+y) + yf(x)) + (x+1)f(y) = x.$$

1. Préliminaires

(a) Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective et que si $g \circ f$ est injective, f est injective.

(b) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer g est bijective si et seulement si la fonction $g^2\colon x \mapsto g(g(x))$ est bijective.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $g\colon x \mapsto ax + b$ une fonction affine. Montrer que g est bijective si et seulement si $a \neq 0$.

2. Montrer que parmi les fonctions affines, c'est-à-dire les fonctions de la forme $x \mapsto ax + b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto -x$ est la seule qui vérifie (E).

3. On se donne à présent une fonction f vérifiant (E). Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer une expression simple de $f(f(x))$ en fonction de x et $f(0)$. En déduire que f est bijective si et seulement si $f(0) \neq 1$.

4. ★ On considère le cas où $f(0) = 1$. On note $E = f^{-1}(\{-1\})$.

(a) Montrer que E est non vide, puis que $-1 \in E$.

(b) En appliquant (E) à un couple (x, y) judicieusement choisi, montrer que $0 \in E$. Qu'en déduit-on ?

On peut montrer par ailleurs que si $f(0) \neq 1$, f est nécessairement affine.

Exercice 4. Théorème de Cantor-Bernstein.

I. Équipotence.

On dit que deux ensembles E et F sont équipotents, ce que l'on note $E \sim F$, s'il existe une bijection de E sur F, c'est-à-dire s'il existe une application $g\colon E \to F$ bijective. On note $E \preceq F$ s'il existe une injection de E dans F.

1) Si E et F sont des ensembles finis. Que peut-on dire sur les cardinaux $|E|$ et $|F|$ si $E \sim F$? et si $E \preceq F$?

2) Montrer que $]0,1[\ \sim\ ]1,+\infty[$.

3) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur la classe des ensembles («l'ensemble» des ensembles).

4) Montrer que $]0,1[\ \sim \mathbb{R}$.

II. Théorème de Cantor-Bernstein. On veut montrer que si $E \preceq F$ et $F \preceq E$, alors $E \sim F$. On considère $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$ deux injections.

1) Soit $h\colon E \to F$ une application et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

a) Montrer que $\displaystyle h\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} h(A_i)$.

b) On suppose h injective et on se donne B une partie de E. Montrer que si $y \in \overline{B}$, alors $h(y) \in \overline{h(B)}$.
En déduire que $h(\overline{B}) = h(E) \cap \overline{h(B)}$.

c) Montrer que si h est injective, $\quad h\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} h(A_i)$.

2) ★ On définit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E par $A_0 = \overline{g(F)} = E\backslash g(F)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = g(f(A_n))$. Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = (g \circ f)^{(n)}(A_0)$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_0 et A_n sont disjoints. En déduire que les A_n sont deux à deux disjoints.

b) Montrer que f induit une bijection de A sur $f(A)$.

c) Déterminer l'image de $f(A)$ par g. En déduire que g induit une bijection de $f(A)$ sur $A\backslash A_0$. Puis de $\overline{f(A)} = F\backslash f(A)$ sur $\overline{A} = E\backslash A$. On note $g^{-1}\colon \overline{A} \to \overline{f(A)}$ la bijection réciproque.

3) Expliciter une bijection entre E et F.

III. Applications

1) ★ Déterminer une application injective $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. En déduire que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2$, puis que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

2) ♣ Soit E un ensemble, on veut montrer que $E \nsim \mathcal{P}(E)$. Plus précisément, on montre par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection $f\colon E \to \mathcal{P}(E)$. En considérant $F = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, aboutir à une contradiction.

Exercice 5.

I. Parties syndétiques. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, un ensemble $S \subset \mathbb{N}$ est dit p-syndétique si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S \cap [\![n, n+p-1]\!] \neq \varnothing$. Un ensemble $S \subset \mathbb{N}$ est dit syndétique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que S soit p-syndétique.

1) Que dire d'une partie $S \subset \mathbb{N}$ qui soit 1-syndétique ?

2) Montrer que l'ensemble des entiers pairs est syndétique.

3) Montrer que l'ensemble des carrés parfaits n'est pas syndétique.

4) ★ Montrer que l'ensemble des nombres premiers n'est pas syndétique.

II. Parties épaisses. On dit que $T \subset \mathbb{N}$ est épaisse si pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[\![n, n+\ell-1]\!] \subset T$.

1) L'ensemble des entiers pairs est-il épais ?

2) Dessiner l'ensemble $\big\{2^n + m \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } m \leqslant n\big\}$ et montrer qu'il est épais.

III. Lien entre les deux notions. Soit $S \subset \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre

(i) S est syndétique.

(ii) $\mathbb{N}\backslash S$ n'est pas épais.

(iii) S rencontre toute partie épaisse, c'est-à-dire que pour toute partie épaisse $T \subset \mathbb{N}$, on a $S \cap T \neq \varnothing$.

IV. ★ Parties syndétiques par morceaux et régularité par partitions.

Pour $p, \ell \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une suite $a_1 < \ldots < a_\ell$ d'entiers naturels est une p-chaîne de longueur ℓ si $\forall i \in [\![1, \ell-1]\!]$, $a_{i+1} - a_i \leqslant p$.

On dit que $S \subset \mathbb{N}$ est p-syndétique par morceaux si S contient des p-chaînes arbitrairement longues.

1) Montrer l'équivalence entre

(i) A est syndétique par morceaux.

(ii) il existe p tel que l'ensemble $A + [\![0, p-1]\!] = \{a + k,\ a \in A, k \in [\![0, p-1]\!]\}$ soit épais.

(iii) il existe S syndétique et T épais tels que $A = S \cap T$.

2) Montrer que si A est syndétique par morceaux, et $A = B \cup C$ est une partition de A, alors B ou C est syndétique par morceaux.

3) En déduire que si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est une partition de $\mathbb{N}$, alors l'une des parties est syndétique par morceaux.

Indications Exercice 2.

II. **1)** Il s'agit de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et toutes parties $A_1, \ldots, A_n$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$. Proposition de rédaction : «Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que pour toutes n parties appartenant à $\mathcal{F}$, leur intersection appartient à $\mathcal{F}$. On considère $n+1$ parties $A_1, \ldots, A_{n+1}$ appartenant à $\mathcal{F}$.

2) On peut également chercher une famille $\mathcal{F}$ stable par réunion, qui n'est pas stable par réunion dénombrable (sur $\mathbb{N}$), puis prendre $\mathcal{F}^d$.

Indications Exercice 3.

2. Injecter $ax + b$ dans (E), puis des valeurs particulières de x, y.

3. Utiliser les questions précédentes.

Indications Exercice 4.

I. **4)** Utiliser la transitivité et la question 2 : on a, par exemple $]0{,}1[\sim\sim]1{,}+\infty[\sim]0{,}+\infty[\sim \mathbb{R}$, à justifier.

II. **1)** **c)** On peut procéder par égalités d'ensembles en utilisant les questions précédentes, ou par double inclusion directement.

2) **a)** Par l'absurde, si $x \in A_n \cap A_m$ pour des indices $n < m$, déterminer une fonction h injective telle que $A_n = h(A_0)$ et $A_m = h(A_{m-n})$.

c) Pour déterminer l'image de $f(A)$ par g, puis celle de $\overline{f(A)}$, utiliser une question précédente.

III. **1)** Penser à la décomposition en facteurs premiers, ou à une application vue en TD.

Indications Exercice 5.

I. **4)** Considérer les entiers $n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$.