DM n°3

Le III) de l'exercice 2 est facultatif.

Exercice 1. Étant donnée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

I. Expliciter S_0, S_1, S_2 en fonction de u_0, u_1, u_2.

II. Calculer la valeur de S_n pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1) $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 1$ **2)** $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 2^{2k}$ **3)** $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 2^k + 3^{-k}$

III. On s'intéresse au cas où $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = k$. On se propose de calculer la valeur de S_n de deux façons différentes.

1) a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

b) En déduire une expression simple de S_n.

2) On considère la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}$.

a) En utilisant f, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

b) Retrouver alors la valeur de S_n.

IV. On s'intéresse au cas où $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = k^2$.

1) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}\binom{n}{k} = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

2) En déduire la valeur de S_n lorsque $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = k^2$.

V. Formule d'inversion binomiale.

Soit $n \geqslant 1$.

1) Soient $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$ des entiers. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.

2) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}S_k = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}u_j.$$

3) En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}S_k = u_n$.

Exercice 2. Soit ℓ un entier $\geqslant 2$. On appelle séquence de longueur ℓ tout ℓ-uplet $a = (a_0, \dots, a_{\ell-1}) \in \{1, -1\}^\ell$ de réels tels que $\forall i \in [\![0, \ell-1]\!]$, $a_i = \pm 1$. On note $\mathcal{S}_\ell = \{1, -1\}^\ell$ l'ensemble des séquences de longueur ℓ.

On dit que deux séquences $a = (a_0, \dots, a_{\ell-1}), b = (b_0, \dots, b_{\ell-1}) \in \mathcal{S}_\ell$ forment une paire complémentaire si

$$\forall j \in [\![1, \ell-1]\!], \quad \sum_{i=0}^{\ell-1-j}\left(a_i a_{i+j} + b_i b_{i+j}\right) = 0.$$

On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ des entiers $\ell \geqslant 2$ pour lesquels il existe au moins une paire complémentaire de longueur ℓ.

I. Deux exemples.

1) Montrer que $2 \in \mathcal{L}$. **2)** ★ Montrer que $3 \notin \mathcal{L}$.

II. Un critère polynomial.

1) Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, et $Q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ deux fonctions polynomiales, de degrés n.

On note $P(x)Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{2n} c_k x^k$. Sous l'hypothèse $n \geqslant 2$, que valent $c_0, c_1, c_2, c_{2n}, c_{2n-1}, c_{2n-2}$?

Donner sans justifier une expression de c_k, pour $k \in [\![0, n]\!]$, et compléter, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $c_{2n-k} = \sum\limits_{i=0}^{\dots} a_{n-i} b_{\dots}$.

2) À toute séquence $a = (a_0, \dots, a_{\ell-1})$ de longueur ℓ, on associe le polynôme séquentiel P_a, ainsi que les fonctions Q_a et H_a, définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$P_a(x) = \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i x^i, \quad Q_a(x) = x^{\ell-1}P_a\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad H_a(x) = P_a(x)Q_a(x).$$

a) Vérifier que Q_a peut s'écrire $Q_a(x) = \sum_{k=0}^{\ell-1} b_k x^k$. Expliciter les coefficients b_k.

b) On note $H_a(x) = \sum_{k=0}^{2(\ell-1)} c_k x^k$. Montrer que H_a est symétrique, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, \ell-1]\!]$, $c_{2(\ell-1)-k} = c_k$.

c) Soient a, b deux séquences de même longueur ℓ. On considère la fonction $f\colon x \mapsto H_a(x) + H_b(x)$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que a, b forment une paire complémentaire si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 2\ell x^{\ell-1}$.

On admettra que l'égalité de deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^*$ entraîne l'égalité de leurs coefficients.

d) Montrer que $P_a(1)$ et $P_b(1)$ sont des entiers de même parité. En posant $\alpha = \frac{P_a(1)+P_b(1)}{2}$ et $\beta = \frac{P_a(1)-P_b(1)}{2}$, en déduire que tout élément de $\mathcal{L}$ peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

3) Montrer que le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{N}$ est un ensemble infini.

On pourra étudier le reste de la division euclidienne par 4 d'un carré d'entier.

III. Parité des éléments de $\mathcal{L}$.

1) Démontrer, pour toute séquence v de longueur paire $2m$, l'équivalence entre

(i) $4 \mid v_0 + v_1 + \cdots + v_{2m-1}$.

(ii) le nombre de coordonnées de v égales à -1 a la même parité que m.

(iii) $v_0 v_1 \ldots v_{2m-1} = (-1)^m$.

2) Soit $\ell \in \mathcal{L}$ et a, b une paire complémentaire de longueur ℓ. Pour $0 \leqslant i \leqslant \ell - 1$, on pose $x_i = a_i b_i$.

a) Montrer que pour tout $1 \leqslant j \leqslant \ell - 1$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{\ell-1-j} x_k x_{k+j} = (-1)^{\ell - j}$.

On pourra considérer la somme des coordonnées de la séquence $(a_0 a_j, \ldots, a_{\ell-1-j} a_{\ell-1}, b_0 b_j, \ldots, b_{\ell-1-j} b_{\ell-1})$.

b) En déduire que, pour tout $j \in [\![1, \ell-2]\!]$, $x_j x_{\ell-1-j} = -1$.

c) Montrer que tout élément de $\mathcal{L}$ est pair.

Exercice 3. ★

On appelle permutation de $[\![1, n]\!]$ toute application $\sigma \colon [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ bijective.

I. Inégalité du réordonnement.

1) Soient $a < a'$ et $b < b'$. Comparer $ab' + a'b$ et $ab + a'b'$.

2) Montrer que la seule permutation croissante de $[\![1, n]\!]$ est l'identité.

3) Soient $a_1 < \ldots < a_n$, $b_1 < \ldots < b_n$ des réels et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.

Montrer que $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$ est maximale lorsque $\sigma = \mathrm{Id}$.

Déterminer, en justifiant brièvement, sa valeur minimale.

4) Justifier que la propriété reste vraie si les inégalités sont larges.

II. Inégalité de Tchebychev.

On suppose toujours $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.

1) En développant le produit de gauche, et regroupant les termes en n sommes de la forme $\sum a_i b_{\sigma(i)}$, pour n permutations distinctes, montrer que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

2) Donner, en justifiant brièvement, une minoration du produit de gauche.

Exercice 4. ★ Soient $x_1 < \ldots < x_n$ des réels.

1. Justifier brièvement que $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \geqslant 1\right\}$ est une réunion d'intervalles disjoints.

2. Calculer la somme de leurs longueurs.

Exercice 5. ★ **Décomposition factorielle**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$ tels que $\forall i$, $x_i \leqslant i$, $x_p \neq 0$ et $n = \sum_{k=1}^{p} x_k k!$ et que cette écriture est unique.

Exercice 6. ★ Une barrière circulaire contient 17 poteaux dont 5 sont pourris. Montrer qu'il existe 7 poteaux consécutifs dont exactement 3 sont pourris.

Indications Exercice 1.

II. 1) Il s'agit ici de remplacer, dans la définition de S_n, les termes u_k par 1, puis de calculer la somme obtenue.

III. 2) a) Donner une expression de $f(x)$ qui ne fasse pas intervenir de somme. Puis dériver chacune des deux expressions de $f(x)$, les deux dérivées doivent être égales.

Indications Exercice 2.

II. 2) b) Les questions précédentes donnent des expressions de c_k et $c_{2(\ell-1)-k}$. Il s'agit de vérifier qu'elles coïncident, par un changement d'indices.

c) $\forall x$, $f(x) = 2\ell x^{\ell-1}$ revient à dire que tous les autres coefficients sont nuls. En l'écrivant, on devrait obtenir les relations qui définissent les paires complémentaires.

d) Justifier que $P_a(1)$ a la même parité que ℓ.

Indications Exercice 3.

I. 3) Comme il n'y a qu'un nombre fini de permutations de $[\![1, n]\!]$, le maximum est atteint par une (ou plusieurs) permutation, que l'on considère. Rmq : $\mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$ est la seule permutation qui préserve l'ordre.

II. 1) Considérer la permutation σ définie par $\sigma(i) = i+1$ et $\sigma(n) = 1$, et la famille de n permutations $(\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^{n-1})$.

Indications Exercice 4.

1. Les intervalles recherchées sont de la forme $]x_i, y_i[$.

2. Les y_i sont racines d'un certain polynôme.

Indications Exercice 5. Existence : récurrence forte. Unicité : utiliser $\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$.

Indications Exercice 6. Pour $i \in [\![1, 17]\!]$, on pourra poser $x_i = 1$, ou $x_i = 0$ selon l'état du i-ième poteau. On peut également prolonger cette suite par périodicité, de sorte que $x_{18} = x_1$, etc. Traduire l'hypothèse, et le résultat à démontrer en fonction des x_i.