DM n°4

En priorité : Exercices 1 à 3. Facultatif : à partir du II)2) de l'exercice 4.

Exercice 1. On considère la fonction tangente hyperbolique, définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

1. Tracer l'allure des graphes des fonctions cosh et sinh.
2. Montrer que la fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note $\operatorname{argtanh}\colon I \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque. Tracer l'allure du graphe de tanh, en précisant la tangente en 0, et celui de argtanh.
3. Justifier brièvement (mais précisément) que argtanh est dérivable, et montrer que $\forall x \in I$, $\operatorname{argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
4. Pour $x \in I$, exprimer $\operatorname{argtanh}(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2. Moyenne logarithmique.

1. Montrer que pour tout $y > 0$, $\quad 1 \leqslant \dfrac{\sinh y}{y} \leqslant \cosh y$.
2. Soit $x > 0$, avec $x \neq 1$. En choisissant une valeur judicieuse de y, en déduire que $x^{1/2} \leqslant \dfrac{x-1}{\ln x} \leqslant \dfrac{1}{2}(x+1)$.
3. En déduire que pour tous $a \neq b$ strictement positifs, $\quad \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} \leqslant \dfrac{b+a}{2}$.

Exercice 3. Majorations, minorations élémentaires des racines d'un polynôme.

On considère un polynôme unitaire P à coefficients réels de degré n :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_iX^i, \text{ où } \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ a_i \in \mathbb{R},$$

ainsi que t une racine réelle de P, c'est-à-dire un réel tel que $P(t) = 0$.

1. Montrer que $\quad (E)\colon \quad |t|^n \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} |t|^i |a_i|$.
2. (a) On suppose dans cette question que $|t| \geqslant 1$. Déduire de (E) que $|t| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

   (b) Montrer que $\quad |t| \leqslant \max(1, \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|)$.
3. On note $M = \displaystyle\max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} |a_i| = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)$.

   (a) En utilisant (E), montrer que si $|t| \neq 1$, $|t|^n \leqslant M\frac{1-|t|^n}{1-|t|}$.

   (b) En déduire que $|t| \leqslant 1 + M$.

Exercice 4.

I. Théorème de Dirichlet et meilleures approximations rationnelles.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ irrationnel et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ une fraction irréductible. On dit que $\frac{p}{q}$ est une meilleure approximation rationnelle de x s'il n'existe aucun rationnel strictement compris entre x et $\frac{p}{q}$ dont le dénominateur soit $\leqslant q$.

Montrer que si $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, alors $\frac{p}{q}$ est une meilleure approximation rationnelle de x.

2) Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor \in [0,1[$ la partie fractionnaire de t.

a) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que si $\big|\{x\} - \{y\}\big| \leqslant \varepsilon$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - y - p| \leqslant \varepsilon$. La réciproque est-elle vraie ?

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En considérant, pour $0 \leqslant k \leqslant N$, les $a_k = \{kx\}$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$1 \leqslant q \leqslant N \text{ et } \left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{Nq} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

3) ★ Co-approximations rationnelles. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $|nx_1 - p_1| \leqslant \frac{1}{N}$ et $|nx_2 - p_2| \leqslant \frac{1}{N}$.

Autrement dit, on peut bien approximer x_1 et x_2 par deux fractions de même dénominateur.

II. Développement en fractions continues.

Tout réel $x > 1$ non entier s'écrit de façon unique sous la forme $x = a + \frac{1}{x'}$, où $a = E(x) \in \mathbb{N}$ et $x' = \frac{1}{x-a} > 1$.

Soit $x > 1$. On pose $x_0 = x$, $a_0 = E(x_0)$, et on définit deux suites (a_n) et (x_n) par récurrence en posant, tant que x_n n'est pas un entier, $\quad x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n - a_n}$ de sorte que $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$ et $a_{n+1} = E(x_{n+1})$.

On peut alors écrire $\quad x = x_0 = a_0 + \dfrac{1}{x_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = \cdots = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x_{n+1}}}}}$,

ce que l'on notera $x = [a_0, a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}]$.

1) Définition et exemple.

a) Justifier que si $x > 1$ est irrationnel, on définit ainsi deux suites infinies $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Pour $x = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, exprimer $\frac{1}{\varphi-1}$ en fonction de φ, et en déduire une expression explicite de a_n.

c) ★ On suppose que $x > 1$ est rationnel. Tant que x_n est défini, on écrit $x_n = \frac{c_n}{d_n}$, sous forme irréductible. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que x_n soit entier.

2) Soit $x > 1$ irrationnel. On définit $(p_n), (q_n)$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n]$. Formellement, on pose

$$\begin{cases} (p_0, q_0) = (1, 0) \\ (p_1, q_1) = (a_0, 1) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (p_{n+1}, q_{n+1}) = a_n(p_n, q_n) + (p_{n-1}, q_{n-1}). \quad (*)$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = \frac{x_n p_n + p_{n-1}}{x_n q_n + q_{n-1}}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$. En déduire que les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ sont irréductibles.

c) En écrivant $\frac{x_n p_n + p_{n-1}}{x_n q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n}{q_n} \frac{x_n q_n}{x_n q_n + q_{n-1}} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \frac{q_{n-1}}{x_n q_n + q_{n-1}}$, en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \leqslant \frac{1}{q_n q_{n-1}} \leqslant \frac{1}{q_{n-1}^2}$.

Les fractions partielles $\frac{p_n}{q_n}$ sont donc des meilleures approximations rationnelles de x.

d) Montrer que $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

3) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = [a_0, \dots, a_n]$. On admet la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, où (p_n) et (q_n) sont les suites définies par $(*)$.

a) En utilisant II.2)b), montrer que les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes, c'est-à-dire que $(r_{2n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante, $(r_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{2n} \geqslant r_{2n+1}$ et $r_{2n} - r_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On admet que cela implique que la suite (r_n) converge vers un réel $x > 1$.

On note désormais $x = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots] = \lim\limits_{n\to+\infty} [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

b) Montrer que $x \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une bijection de l'ensemble des irrationnels de $]1, +\infty[$ sur l'ensemble des suites d'entiers à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

III. ★ Développements périodiques en fractions continues.

On se propose de montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si x est quadratique, c'est-à-dire la racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

1) Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang, alors x est quadratique.

2) Étant donné $\Delta \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(\Delta)$ l'ensemble des polynômes $AX^2 + BX + C$ à coefficients entiers tels que $AC < 0$ et dont le discriminant vaut Δ. Montrer que $\mathcal{P}(\Delta)$ est fini.

3) Soit $x > 1$ irrationnel, racine d'un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers. Celui-ci est alors unique, à un coefficient multiplicatif près, et on note x^* l'autre racine de P. On note $a_0 = E(x)$, $z = x - a_0$ et $y = \frac{1}{z}$.

a) On suppose $P \in \mathcal{P}(\Delta)$. Montrer que z et y sont racines de polynômes de degré 2 de $\mathcal{P}(\Delta)$.

En déduire qu'il existe dans la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux termes qui sont racines d'un même polynôme de $\mathcal{P}(\Delta)$. Conclure que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

b) On suppose $E(x^*) < E(x)$. Montrer que y est racine d'un polynôme appartenant à un $\mathcal{P}(\Delta)$. Conclure.

c) On suppose $x^* > 1$. On admet que la conjugaison $\sigma\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x]$, $t \mapsto t^*$ est un morphisme bijectif de corps, c'est-à-dire une bijection vérifiant $\sigma(t+s) = \sigma(t) + \sigma(s)$ et $\sigma(ts) = \sigma(t)\sigma(s)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^* = [a_0, a_1, \dots, a_n, x_n^*]$.

Montrer qu'il existe n tel que $x_n^* < 1$. Conclure.

Exercice 5. ★ Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a^b = b^a$.

Indications Exercice 1.

4. Il s'agit de résoudre $\tanh x = y \Leftrightarrow \dots$.

Indications Exercice 2.

1. Avant de poser une fonction à étudier, multiplier par y.

Indications Exercice 3.

1. Écrire $P(t) = 0$, manipuler judicieusement cette égalité et appliquer l'inégalité triangulaire.

3. **(a)** Si $M = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} |a_i|$, on a $\forall i \in [\![0, n-1]\!], |a_i| \leqslant M$.

(b) Discuter selon si $|t| \leqslant 1$ ou $|t| > 1$.

Indications Exercice 4.

I. **2)** **b)** Utiliser le principe des tiroirs : découper l'intervalle $[0, 1]$ en N sous-intervalles de taille $\frac{1}{N}$. On peut trouver des multiples de x dont les parties fractionnaires sont proches, et en faisant la différence, un multiple de x très proche d'un entier.

3) Considérer les couples $\big(\{nx_1\}, \{nx_2\}\big)$ dans $[0, 1]^2$.

II. **1)** **a)** Il s'agit de justifier que x_n n'est jamais entier.

c) Comparer la taille de $c_n, d_n, c_{n+1}, d_{n+1}$.

2) **c)** Utiliser la propriété suivante : si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

III. **1)** Utiliser $x = \frac{x_n p_n + p_{n-1}}{x_n q_n + q_{n-1}}$