DM n°5

Exercice 1. Calcul de $\zeta(2)$.

I. Préliminaires

1) Une formule trigonométrique. Montrer que $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad 2\sin a \cos b = \sin(a+b) - \sin(b-a)$.

2) Lemme de Riemann-Lebesgue

a) Soit g une fonction continue sur $[a,b]$. Justifier soigneusement que $\frac{1}{n}\int_a^b g(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, et $d \in \mathbb{R}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(nt+d)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Dans la suite du sujet, on admettra que ce résultat persiste si l'on suppose seulement que f est continue sur $[a,b]$. C'est le lemme de Riemann-Lebesgue.

II. On veut déterminer la limite, quand $n \to +\infty$, de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^\pi t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.

2) Déterminer deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on définit $\quad C_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, en utilisant I.1), simplifier la quantité $2\sin\frac{t}{2}C_n(t)$.

En déduire que si t n'est pas un multiple de 2π, on a

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

4) Soit f définie par $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0,\ f(t) = \frac{\sin t}{t}$. Justifier que f est continue en 0, c'est-à-dire $f(t) \xrightarrow[t \to 0]{} f(0)$.

5) Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t,$$

où φ est une fonction à expliciter. En l'exprimant en fonction de f, justifier que φ est continue sur $[0,\pi]$.

6) Conclure.

La limite, quand $n \to +\infty$ de $\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ se note, si elle existe, $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$.

Exercice 2. Intégrales de Wallis.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$.

1) En écrivant $(\cos t)^n = \cos t(\cos t)^{n-1}$, et à l'aide d'une IPP, montrer que $\forall n \geqslant 2, I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

3) Étudier la monotonie de la suite (I_n).

4) En déduire un encadrement de I_n, puis que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, c'est-à-dire que $\frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue strictement croissante réalisant une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$. L'objectif est de démontrer la relation suivante, de plusieurs manières.

$$(E)\colon \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = bf(b) - af(a).$$

1) Dans les sous-questions suivantes, on suppose que f est dérivable, et f' continue.

a) En étudiant la fonction $\quad g\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x)$, établir (E).

b) Indépendamment de ce qui précède, montrer que $\quad \displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b uf'(u)\,\mathrm{d}u$.

Retrouver (E).

2) On ne suppose plus que f est dérivable.

a) Sous l'hypothèse $a = 0$ et $f(a) = 0$, établir (E) par un argument géométrique.

b) En déduire la relation (E) dans le cas général.

Exercice 4. Irrationnalité de π.

On pourra utiliser la propriété de stricte positivité de l'intégrale : si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ vérifiant $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $\forall t \in [a, b]$, $f(t) = 0$.

Si P est une fonction polynomiale, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P^{(n)}$ la dérivée n-ième de P, définie par

$$P^{(0)} = P, \quad P^{(1)} = P' \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'.$$

On notera que si P est de degré d, $P^{(d)}$ est une fonction constante, et $P^{(d+1)}$ est la fonction nulle.

I. Une famille de polynômes.

On fixe $p, q \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(qx - p)^n.$$

1) Soit $P\colon x \mapsto \sum_{k=0}^d a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$ une fonction polynomiale. Donner une expression de $P^{(k)}(0)$, pour $k \in \mathbb{N}$, en fonction des coefficients $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant d}$. On pourra distinguer plusieurs cas. On ne demande pas de justifier.

2) En développant $P_n(x)$, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.
On pourra distinguer selon si $k < n$, $k \in [\![n, 2n]\!]$ et $k > 2n$.

3) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}$.

On veut montrer que π est irrationnel. On raisonne par l'absurde et dans la suite du sujet, on suppose que $\pi = \frac{p}{q}$.

II. Étude de la limite d'une intégrale.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

1) Déterminer le maximum de $|P_n(x)|$ sur $[0, \pi]$.

2) Montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3) Montrer que

$$I_n = P_n(0) + P_n\left(\frac{p}{q}\right) - \int_0^\pi P_n''(x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

III. Conclusion

1) Montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$.

2) Conclure.

Exercice 5. ★ Soit $d > 2$ et $P = \lambda \prod_{k=1}^{d}(X - \alpha_i)$ un polynôme réel scindé tel que $P(1) = P(-1) = 0$ et $\forall x \in]-1,1[$, $P(x) > 0$.

1. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $\alpha > 1$, $x + \alpha \geqslant (1+\alpha)^{\frac{1+x}{2}}(\alpha - 1)^{\frac{1-x}{2}}$.

2. On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle formé par l'axe des abscisses et les tangentes de P en 1 et -1.

(a) On écrit $P(X) = (1 - X)(X + 1)Q(X)$. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de $Q(1), Q(-1)$. Montrer que $\mathcal{A} \leqslant 2\sqrt{Q(1)Q(-1)}$.

(b) Soit $a > 0$. Montrer que $\int_{-1}^1 (1 - x)(x + 1)a^x\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 (1 - x)(x + 1)\,\mathrm{d}x$.

(c) Montrer que

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{3}{2}\int_{-1}^1 P.$$

Exercice 6. ★ Notons E l'ensemble des mesures d'angles de triangles de $\mathbb{R}^2$ ayant leurs trois sommets à coordonnées entières.

1. Montrer que $\theta \in E \Leftrightarrow \tan\theta \in \mathbb{Q}$ ou $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

2. Montrer que E est dense dans $[0,\pi]$.

3. Montrer que $\theta_1, \theta_2 \in E$ et $\theta_1 + \theta_2 < \pi \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 \in E$.

Indications Exercice 1.

II. 6) Utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue.

Indications Exercice 4.

I. 1) Écrire P', P'', $P^{(3)}$ avec des .... Si $k > d$, $P^{(k)}$ est la fonction nulle.

3) Utiliser une propriété de symétrie de P_n.

Indications Exercice 5.

1. C'est une inégalité de convexité.

2. (a) Utiliser l'IAG.

(c) Soit $a > 0$. Montrer que $\int_{-1}^1 (1 - x)(x + 1)a^x\,\mathrm{d}x \geqslant 2\int_0^1 (1 - x)(x + 1)\,\mathrm{d}x$.