DM n°6

Exercice 1. Série harmonique, constante d'Euler-Mascheroni. On considère la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Montrer que (u_n) est décroissante.
2. En introduisant une quantité intégrale, montrer que pour $p \geqslant 2$ entier, on a $\frac{1}{p} \leqslant \ln p - \ln(p-1) \leqslant \frac{1}{p-1}$.
3. En sommant ces inégalités, en déduire que la suite u_n converge vers une limite γ appelée constante d'Euler-Mascheroni.

On a $u_n = \gamma + o_{+\infty}(1)$, *où* $o_{+\infty}(1)$ *désigne une suite qui tend vers* 0. *On a montré que* $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$.

Exercice 2.

I. On considère les suites définies, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $v_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$ et $w_n = u_n - 2\sqrt{n}$.

1) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2) Montrer que (v_n) est croissante.

3) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

4) Montrer que $u_n \to +\infty$.

II. On considère la suite $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

1) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_n = u_{2n}$. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

2) Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que la suite (w_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

4) Montrer que la suite (u_n) converge.

On note $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ *la limite de* (u_n).

III. ★ Applications de la nature des séries $\sum \frac{1}{k^2}$ et $\sum \frac{1}{k}$.

On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

1) Le lion et le chrétien.

Un lion et un chrétien sont enfermés dans une arène circulaire, de rayon 2. Initialement, le lion est au centre de l'arène, et le chrétien est à une distance 1 du lion. Le lion et le chrétien sont modélisés par des points se déplaçant à la même vitesse (que l'on peut prendre $= 1$), l'objectif du lion est d'attraper le chrétien.

Étant donné une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ positive, on considère un type de stratégie pour le chrétien étape par étape : à la n-ième étape, le chrétien considère le segment joignant sa position au centre de l'arène, et se déplace en ligne droite dans une direction perpendiculaire à ce segment, pendant une durée x_n.

Montrer que le chrétien a une stratégie permettant de survivre indéfiniment.

2) Un pont de carte.

On dispose de cartes à jouer homogènes, de longueur 2, et d'épaisseur négligée. À partir du bord d'une table, on souhaite construire un pont de carte le plus long possible, qui soit stable.

Par exemple, en posant une carte en équilibre au bord de la table, c'est-à-dire positionnée de sorte que son milieu coïncide avec le bord, on obtient un pont d'une longueur 1.

En général, une structure formée de n cartes est stable si et seulement si

(i) le centre de gravité de la structure totale est au-dessus de la table (et pas au-dessus du vide), ce qui assure la stabilité de la première carte.

(ii) la sous-structure formée des $n-1$ cartes suivantes est stable, sous l'hypothèse que la première carte soit fixé. Autrement dit, le centre de gravité de l'ensemble des $n-1$ cartes est situé au-dessus de la première carte, etc.

a) Expliquer comment construire un pont de longueur $\frac{3}{2}$ avec deux cartes.

b) Justifier que l'on peut construire un pont arbitrairement long.

Exercice 3. Pour $a > 0$, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$.
On sera amené à l'étude de la dépendance de cette suite par rapport à son terme initial a. Lorsque c'est nécessaire, on notera $u_n(a)$ au lieu de u_n, afin d'expliciter cette dépendance.

I. Deux exemples.

1) On suppose $a = 1$. Montrer que $u_n \to 0$.

2) On suppose $a = 2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n + 2$.

II. Étude des comportements possibles.

1) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $u_{n+1} < u_n$, alors $u_{n+2} < u_{n+1}$.

En déduire que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_{p+1} < u_p$, alors (u_n) converge vers 0.

3) Montrer que (u_n) converge vers 0, ou tend vers $+\infty$.

III. Existence d'une valeur critique.

1) Soient $0 \leqslant a \leqslant b$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(a) \leqslant u_n(b)$.

2) Justifier l'existence d'un réel λ tel que

(i) Si $0 < a < \lambda$, $u_n \to 0$

(ii) Si $a > \lambda$, $u_n \to +\infty$.

IV. Étude des comportements critique, et asymptotique.

1) ★ Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $a \mapsto u_n(a)$ est continue. En déduire que pour $a = \lambda$, $u_n \to +\infty$.

2) Montrer que pour tout $n > 1$, $n + 1 < u_n(\lambda) \leqslant n + 2$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n = n + 2 - u_n(\lambda)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} \geqslant 2\varepsilon_n - \frac{1}{n}$. En déduire que (ε_n) converge.

On a montré que $u_n = n + 2 - \varepsilon_n$, *où* $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

4) Soit $x > 0$. En considérant la suite $q_n = \frac{u_n(x)}{u_n(\lambda)}$ montrer que $u_n(x) \sim n\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2^n}$, c'est-à-dire $\frac{u_n(x)}{n(\frac{x}{\lambda})^{2^n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

V. En utilisant $\frac{\ln(u_n(\lambda))}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, montrer que $\lambda = \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}\right)$, c'est-à-dire $\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(k+1)}{2^{k+1}}\right)$.

Exercice 4. ★ Théorème de Knaster-Tarski. Un ensemble ordonné $(T, \leqslant)$ est un treillis si toute paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. C'est un treillis complet si de plus, toute partie $A \subset T$ admet une borne supérieure.

1. Montrer que si T est un treillis complet, T admet un plus petit élément.

2. Si E est un ensemble, montrer que $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un treillis complet.

3. Montrer que si $(T, \leqslant)$ est un treillis complet, toute partie $A \subset T$ admet une borne inférieure.

On considérera $\mathcal{M}$ l'ensemble des minorants de T, $\alpha = \sup \mathcal{M}$, et on justifiera que $\forall a \in A$, $\inf\{\alpha, a\} = \alpha$.

4. Soit $(T, \leqslant)$ un treillis complet, et $f : T \to T$ une application croissante. En considérant $A = \{x \in T \mid x \leqslant f(x)\}$, et $M = \sup A$, montrer que f admet un point fixe.

Pour $a \leqslant b$ *deux réels, le segment* $[a, b]$ *est un treillis complet pour la relation d'ordre usuelle. Toute fonction croissante* $f : [a, b] \to [a, b]$ *admet donc un point fixe.*

Indications Exercice 1.

1. Utiliser l'inégalité $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

Indications Exercice 2.

I. 1) Multiplier et diviser la quantité centrale par sa quantité conjuguée.

2) Utiliser la question précédente.

II. 3) Considérer $w_n - v_n$, montrer que les suites sont adjacentes.

4) Il faut le démontrer à partir de la définition de la limite.

III. 1) Il s'agit de choisir des (x_i) de sorte d'une part que $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i = +\infty$, et d'autre part que la stratégie ne fasse pas sortir le chrétien de l'arène. Étudier comment évolue la distance du chrétien au centre.

2) a) Une propriété d'associativité du centre de gravité assure que l'abscisse du centre de gravité d'un ensemble de deux cartes est la moyenne des abscisses des centres de gravités de chacune des cartes.

b) Avec n cartes, on peut construire un pont de longueur totale $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Si on note x_1 le centre de la première carte, et x_G le centre de gravité de la sous-structure formée des $n - 1$ autres cartes, le centre de gravité de la structure totale a pour abscisse $\frac{x_1+(n-1)x_G}{n}$.

Indications Exercice 3.

I. 1) On peut conjecturer une première propriété plus faible (et très simple) sur la suite (u_n), que l'on montre par récurrence.

III. 2) Définir λ comme la borne supérieure d'un ensemble : L'ensemble des a tels que $u_n(a) \to 0$.

IV. Par l'absurde, si pour $a = \lambda$ la suite $\to 0$, alors il existerait un n tel que $u_n(\lambda)$ soit petit, mais alors par continuité, pour a proche de λ, $u_n(a)$ serait petit également...

V. Exprimer λ en fonction de $u_n(\lambda)$.

Indications Exercice 4.

3. Montrer que la borne supérieure de l'ensemble des minorants de A convient.