DM n°7

Indications sur la quatrième page. Facultatif : Ex 2)III), et Ex 5. L'exercice 4 est un grand classique orienté plutôt MP*, en restant accessible.

Exercice 1. On considère une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

I. **1)** Montrer que la suite $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2) Montrer que si $z_0 \notin \mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \neq 0$.

Dans la suite, on suppose $z_0 \notin \mathbb{R}$.

II. Si z est un nombre complexe non nul, on note $\arg z$ l'unique argument de z appartenant à $]-\pi,\pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après la partie précédente $z_n \neq 0$, donc $\arg z_n$ est bien défini. On note $\theta_n = \arg z_n$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_{n+1}| = |z_n| \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

2) En déduire que la suite (θ_n) tend vers 0.

3) Montrer que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) Qu'en déduire sur la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

III. **1)** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| = \frac{\mathrm{Im}\, z_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.$$

2) En déduire la limite de $|z_n|$, puis de (z_n).

Exercice 2.

I. Intégration de fonctions à valeurs complexes.

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Il existe alors deux fonctions $f_{re}, f_{im}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = f_{re}(t) + i f_{im}(t)$, définies par $\forall t,\ f_{re}(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ et $f_{im}(t) = \mathrm{Im}(f(t))$.

On dit que la fonction f est continue si f_{re} et f_{im} le sont, et qu'elle est dérivable si f_{re} et f_{im} le sont. On définit alors la dérivée de f comme la fonction $f'\colon t \mapsto f'_{re}(t) + i f'_{im}(t)$.

On définit aussi l'intégrale de f, comme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_{re}(t) + i f_{im}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_{re}(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b f_{im}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Justifier que $t \mapsto e^{int}$ est continue et calculer $\int_0^{2\pi} e^{int}\,\mathrm{d}t$.

2) Inégalité triangulaire. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, et $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t e^{-i\theta}\right).$$

b) En déduire que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$

II. Formule de Cauchy polynomiale.

Soit $P(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$ une fonction polynomiale à coefficients complexes.

1) **a)** Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it})\,\mathrm{d}t = a_0$.

b) Calculer, pour $n \in [\![0, d]\!]$, $\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t$.

2) Lien entre une borne sur les coefficients de P et une borne sur les valeurs de P sur $\mathbb{U}$.

a) Justifier l'existence de $\sup\limits_{t\in\mathbb{U}} |P(e^{it})|$.

b) Montrer que $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant d} |a_k| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup\limits_{\theta\in\mathbb{U}} |P(e^{i\theta})|$.

3) Déduire de II.1)a) que pour $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z_0 + e^{it})\,\mathrm{d}t$.

III. Intégration le long d'un lacet.

Si $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$ et $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction de la variable complexe, on définit l'intégrale de f le long du lacet $\mathrm{Im}\,\gamma$ comme

$$\int_{\mathrm{Im}\,\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En fait, on pourrait montrer que cette quantité ne dépend que du lacet $\mathrm{Im}\,\gamma$: elle est indépendante de la paramétrisation choisie de celui-ci.

1) Intégration de polynômes complexes.

Soit $P\colon z \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k z^d$ un polynôme à coefficients complexes.

a) On paramétrise $\mathbb{U}$ par la fonction $\gamma\colon t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$. Vérifier que $\int_{\mathbb{U}} P(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

En fait, cette dernière égalité reste valable pour n'importe quel lacet.

b) On considère un lacet de $\mathbb{C}$, formé du segment de l'axe réel $[-1, 1]$ et du demi-cercle unité parcouru par e^{it}, pour $t \in [0, \pi]$.

Vérifier que

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} P(e^{i\theta}) i e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

c) On suppose que $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$. En appliquant la relation précédente à un polynôme judicieux, établir l'inégalité de Hilbert :

$$\sum_{0 \leqslant k, \ell \leqslant d} \frac{a_k a_\ell}{k + \ell + 1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{d} a_k^2.$$

2) Principe de l'argument.

On cherche à présent à calculer $\int_{\mathbb{U}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$, en fonction de $z_0 \in \mathbb{C}$.

a) On suppose que $|z_0| < 1$.

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{U}$,

$$\frac{1}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_0^k}{z^{k+1}} + \left(\frac{z_0}{z}\right)^{n+1} \frac{1}{z - z_0}.$$

ii) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\int_{\mathbb{U}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2i\pi + R_n$, où R_n est une suite complexe telle que $|R_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

iii) Conclusion ?

b) ★ On suppose que $|z_0| > 1$. Montrer que $\int_{\mathbb{U}} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 0$.

Plus généralement, si P est un polynôme et γ est un lacet simple (qui ne se recoupe pas) qui tourne dans le sens trigonométrique, l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{\operatorname{Im} \gamma} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z$ donne le nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) qui sont à l'intérieur du lacet $\operatorname{Im} \gamma$.

Exercice 3. Densité dans $\mathbb{N}$.

I. Pour $A \subset \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c_n(A) = \left|A \cap [\![1, n]\!]\right| = \operatorname{Card} A \cap [\![1, n]\!]$ et $d_n(A) = \frac{c_n(A)}{n}$.

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{N}^*$ admet une densité si la suite $d_n(A)$ admet une limite quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, on note $d(A)$ cette limite, appelée densité de A dans $\mathbb{N}$.

1) Propriétés élémentaires.

a) Montrer que si $A \subset \mathbb{N}^*$ admet une densité, alors $d(A) \in [0, 1]$.

b) Si A est fini, existence et valeur de $d(A)$?

c) Si A admet une densité, montrer que $\overline{A}$ admet une densité.

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A = p\mathbb{N}^* = \{pn,\, n \in \mathbb{N}^*\}$ admet une densité.

2) Exemples

a) Montrer que l'ensemble des carrés parfaits est de densité nulle.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que si A a une densité non nulle, alors pour n assez grand $A \cap [n, (1 + \varepsilon)n]$ est non vide.

c) Donner un exemple d'une partie qui n'admet pas de densité.

d) ★ Quelle est la densité de l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale ne comporte aucun 9 ?

3) Densité vis-à-vis d'une partie.

Soit $B \subset \mathbb{N}^*$. On dit que $A \subset \mathbb{N}^*$ est de densité 1 dans B si $\frac{|A \cap B \cap [\![1,n]\!]|}{|B \cap [\![1,n]\!]|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

a) Si B est fini, à quelle condition A est-elle de densité 1 dans B ?

b) Si A est de densité 1 dans $\mathbb{N}$ et B admet une densité $p > 0$ dans $\mathbb{N}$, montrer que A est de densité 1 dans B.

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $i \in [\![0, p - 1]\!]$, $B_i = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \equiv i[p]\}$. Montrer que $A \subset \mathbb{N}^*$ est de densité 1 dans $\mathbb{N}^*$ si et seulement si A est de densité 1 dans chacun des B_i.

II. ★ (D'après un oral X 2022) Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ une partie admettant une densité $d > 0$. On pose $Q = \left\{\frac{a}{b},\, a, b \in A\right\}$.

1) Montrer que Q est dense dans $\mathbb{R}_+$.

2) On suppose que $d = 1$. Montrer que $Q = \mathbb{Q}_+^*$.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partie $A \subset \mathbb{N}^*$ de densité $d \geqslant 1 - \varepsilon$ avec $Q \neq \mathbb{Q}_+^*$.

Exercice 4. ♣ ★ Suites sous-additives. Soit (u_n) une suite positive vérifiant $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $u_{p+q} \leqslant u_p + u_q$.

1. Montrer que $\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ admet une borne inférieure m.

2. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $C_q \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \geqslant q, \quad \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_q}{q} + \frac{C_q}{n}.$$

3. En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers m.

Exercice 5. ★ Irrationalité de $\zeta(3)$. Majoration de $d_n = \text{ppcm}(2, 3, \ldots, n)$.

On définit une suite d'entiers strictement croissante $(a_k)_{k\geqslant 1}$ par

$$a_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 1,\, a_{k+1} = a_k^2 - a_k + 1.$$

1) **a)** Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, on a $2^{2^{k-2}} + 1 \leqslant a_k \leqslant 2^{2^{k-1}}$.

b) En déduire que pour tout $k \geqslant 7$, on a $\frac{1}{a_k} \ln a_k \leqslant \frac{1}{2^{19+k}}$.

2) On considère la suite $(w_k)_{k\geqslant 1}$ définie par $w_k = \prod_{i=1}^k a_i^{1/a_i}$. Montrer que (w_k) est majorée, puis qu'elle converge, vers une limite notée w. On admet que la majoration trouvée implique $w < 3$.

3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} = 1 - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$.

4) Soit $n \geqslant 3$. On considère l'entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_k \leqslant n < a_{k+1}$, et on note

$$C(n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k \lfloor \frac{n}{a_i} \rfloor !}.$$

a) Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on pose $m_i = \lfloor \frac{n}{a_i} \rfloor$ et $m = m_1 + \cdots + m_k$. En l'écrivant comme un produit de coefficients binomiaux, montrer que $\frac{m!}{\prod_{i=1}^k (m_i!)}$ est un entier.

En déduire que $C(n)$ est un entier.

b) Montrer que par récurrence sur $k \geqslant 2$ que pour $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, on a $(m_1 + \cdots + m_k)^{m_1+\cdots+m_k} \geqslant \frac{(m_1+\cdots+m_k)!}{m_1! \ldots m_k!} m_1^{m_1} \ldots m_k^{m_k}$.

c) En déduire que

$$C(n) \leqslant \frac{n^n}{\prod_{i=1}^k \lfloor \frac{n}{a_i} \rfloor^{\lfloor n/a_i \rfloor}}.$$

5) **a)** Soient $a \leqslant n$ des entiers strictement positifs. Montrer que $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor \geqslant \frac{n-a+1}{a}$.

b) En déduire que

$$\frac{\left(\frac{n}{a}\right)^{n/a}}{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor^{\lfloor n/a \rfloor}} \leqslant \left(\frac{en}{a}\right)^{(a-1)/a}.$$

On utilisera en particulier une inégalité sur ln.

c) En déduire que l'on a $C(n) \leqslant n^{k+1} e^k w^n$.

6) Soit p un nombre premier $\leqslant n$. Pour $m \in [\![1, n]\!]$, on note $v_p(m)$ l'exposant en p dans la décomposition en facteurs premiers de m. On notera que pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on a $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.

a) Formule de Legendre.

On note $q = \lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \rfloor$ le plus grand entier j tel que $p^j \leqslant n$.

Pour $j \in [\![1, q]\!]$, quel est le nombre de multiples strictement positifs de p^j inférieurs à n ?

En déduire que pour tout $m \in [\![1, n]\!]$,

$$v_p(m!) = \sum_{j=1}^q \left\lfloor \frac{m}{p^j} \right\rfloor.$$

b) Exprimer $v_p(C(n))$ à l'aide de sommes.

c) Soit $x \geqslant 1$ un réel

i) Pour $a \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\lfloor \frac{x}{a} \rfloor = \lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{a} \rfloor$.

ii) En utilisant 53), montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^k \lfloor \frac{x}{a_i} \rfloor < \lfloor x \rfloor$.

d) En déduire que $C(n)$ est un multiple de $d_n = \text{ppcm}(2, 3, \ldots, n)$.

7) **a)** Justifier que pour n assez grand, $k \leqslant \frac{2}{\ln 2} \ln \ln n$. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, $(k+1) \ln n + k - \varepsilon n \leqslant n$.

b) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $d_n \leqslant 3^n$.

Indications Exercice 1.

I. **2)** On ne peut pas montrer par récurrence la propriété $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n \neq 0$. On peut éventuellement montrer une assertion plus forte par récurrence, ou chercher à utiliser la première question.

II. **1)** Écrire $z_n = |z_n| e^{i\theta_n}$.

III. **2)** Utiliser $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

Indications Exercice 2.

I. **2)** **a)** Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = e^{i\theta} \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right|$.

b) Il s'agit de commencer par justifier que, pour $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\left(c \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \operatorname{Re}\left(c f(t)\right)\mathrm{d}t$.

II. **1)** **b)** On trouve $2\pi a_n$.

2) **a)** Il s'agit de justifier que l'ensemble $\left\{P(z),\ z \in \mathbb{U}\right\}$ est bornée, donc de majorer, pour $z \in \mathbb{U}$, $|P(z)|$, d'une manière indépendante de z.

b) Il s'agit de justifier que $\forall k \in [\![0, d]\!]$, on a $|a_k| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup\limits_{\theta \in \mathbb{U}} \left|P(e^{i\theta})\right|$.

III. **1)** **c)** Considérer le polynôme réel P^2.

Indications Exercice 3.

I. **1)** **a)** Pour obtenir $0 \leqslant d(A) \leqslant 1$, on écrit un encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $d_n(A)$, et on passe à la limite les inégalités.

c) Relier $d_n(A)$ et $d_n(\overline{A})$.

d) Donner une expression explicite de $d_n(A)$.

2) **b)** Par l'absurde, si $A \cap [n, (1+\varepsilon)n] = \varnothing$, minorer $d_{\lfloor (1+\varepsilon)n \rfloor}$.

c) Prendre une partie qui contient tous les éléments entre 2^{2p} et 2^{2p+1}, et aucun élément entre 2^{2p+1} et $2^{2(p+2)}$. Justifier que cette partie n'admet pas de densité revient à montrer qu'une suite diverge, en explicitant deux suites extraites.

II. **1)** Utiliser le fait que A intersecte $[n, (1+\varepsilon)n]$ pour n assez grand.

2) Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, cela revient à montrer que pA intersecte qA.

Indications Exercice 4.

2. Considérer la division euclidienne de n par q.

3. Soit $\varepsilon > 0$.