

DM n°7

Indications sur la troisième page. Facultatif : Ex 3 III), puis à partir de l'ex 4 2). L'exercice 5 est un grand classique orienté plutôt MP*, plus simple que ce qui précède.

Exercice 1. On considère une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

I. 1) Montrer que la suite $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

2) Montrer que si $z_0 \notin \mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$.

■ Dans la suite, on suppose $z_0 \notin \mathbb{R}$.

II. Si z est un nombre complexe non nul, on note $\arg z$ l'unique argument de z appartenant à $] -\pi, \pi]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après la partie précédente $z_n \neq 0$, donc $\arg z_n$ est bien défini. On note $\theta_n = \arg z_n$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_{n+1}| = |z_n| \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

2) En déduire que la suite (θ_n) tend vers 0.

3) Montrer que la suite $(|z_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4) Qu'en déduire sur la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

III. 1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| = \frac{\operatorname{Im} z_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}.$$

2) En déduire la limite de $|z_n|$, puis de (z_n) .

Exercice 2. Polynômes de Bernoulli.

I. 1) Montrer qu'il existe une unique suite de fonctions polynomiales $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $B_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 1, B'_n = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_n(t) dt = 0.$$

2) Expliciter B_1, B_2 .

3) Justifier que pour $n \geq 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

II. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$. Les b_n sont appelés les nombres de Bernoulli.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n(t) = (-1)^n B_n(1-t)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = B_n$.

2) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $b_{2p+1} = 0$.

Exercice 3.

I. Intégration de fonctions à valeurs complexes.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Il existe alors deux fonctions $f_{re}, f_{im}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f_{re}(t) + if_{im}(t)$, définies par $\forall t, f_{re}(t) = \operatorname{Re}(f(t))$ et $f_{im}(t) = \operatorname{Im}(f(t))$.

On dit que la fonction f est continue si f_{re} et f_{im} le sont, et qu'elle est dérivable si f_{re} et f_{im} le sont. On définit alors la dérivée de f comme la fonction $f': t \mapsto f'_{re}(t) + if'_{im}(t)$.

On définit aussi l'intégrale de f , comme

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_{re}(t) dt + i \int_a^b f_{im}(t) dt = \int_a^b f_{re}(t) dt + i \int_a^b f_{im}(t) dt.$$

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Justifier que $t \mapsto e^{int}$ est continue et calculer $\int_0^{2\pi} e^{int} dt$.

2) Inégalité triangulaire. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, et $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) dt e^{-i\theta} \right) = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) e^{-i\theta} dt \right).$$

b) En déduire que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

II. Formule de Cauchy polynomiale.

Soit $P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k$ une fonction polynomiale à coefficients complexes.

- 1) a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) dt = a_0$.
 b) Calculer, pour $n \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $\int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-int} dt$.
- 2) Lien entre une borne sur les coefficients de P et une borne sur les valeurs de P sur \mathbb{U} .
 a) Justifier l'existence de $\sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$.
 b) Montrer que $\max_{0 \leq k \leq d} |a_k| \leq \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |P(e^{i\theta})|$.
- 3) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. En considérant le polynôme $Q(t) = P(z_0 + t)$, montrer que $P(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_0 + e^{it}) dt$.

III. Intégration le long d'un lacet.

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$ et $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de la variable complexe, on définit l'intégrale de f le long du lacet $\Gamma = \gamma([a, b])$ comme

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

En fait, on pourrait montrer que cette quantité ne dépend que du lacet Γ : elle est indépendante de la paramétrisation choisie de celui-ci.

1) Intégration de polynômes complexes.

Soit $P: z \mapsto \sum_{k=0}^d a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes.

- a) On paramétrise \mathbb{U} par la fonction $\gamma: t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$. Vérifier que $\int_{\mathbb{U}} P(z) dz = 0$.

En fait, cette dernière égalité reste valable pour n'importe quel lacet.

- b) On considère un lacet de \mathbb{C} , formé du segment de l'axe réel $[-1, 1]$ et du demi-cercle unité parcouru par e^{it} , pour $t \in [0, \pi]$.

Vérifier que

$$\int_{-1}^1 P(t) dt + \int_0^{\pi} P(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta = 0.$$

- c) ★ On suppose que $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$. En appliquant la relation précédente à un polynôme judicieux, établir l'inégalité de Hilbert :

$$\sum_{0 \leq k, \ell \leq d} \frac{a_k a_{\ell}}{k + \ell + 1} \leq \pi \sum_{k=0}^d a_k^2.$$

2) Principe de l'argument.

On cherche à présent à calculer $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0}$, en fonction de $z_0 \in \mathbb{C}$.

- a) On suppose que $|z_0| < 1$.

- i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{U}$,

$$\frac{1}{z - z_0} = \sum_{k=0}^n \frac{z_0^k}{z^{k+1}} + \left(\frac{z_0}{z}\right)^{n+1} \frac{1}{z - z_0}.$$

- ii) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi + R_n$, où R_n est une suite complexe telle que $|R_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

iii) Conclusion ?

- b) ★ On suppose que $|z_0| > 1$. Montrer que $\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{z - z_0} = 0$.

Plus généralement, si P est un polynôme et γ est un lacet simple (qui ne se recoupe pas) qui tourne dans le sens trigonométrique, l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$ donne le nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) qui sont à l'intérieur du lacet Γ .

Exercice 4. Densité dans \mathbb{N} .

I. Pour $A \subset \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c_n(A) = |A \cap \llbracket 1, n \rrbracket| = \text{Card } A \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ et $d_n(A) = \frac{c_n(A)}{n}$.

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{N}^*$ admet une densité si la suite $d_n(A)$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. Dans ce cas, on note $d(A)$ cette limite, appelée densité de A dans \mathbb{N} .

1) Propriétés élémentaires.

- a) Montrer que si $A \subset \mathbb{N}^*$ admet une densité, alors $d(A) \in [0, 1]$.
- b) Si A est fini, existence et valeur de $d(A)$?
- c) Si A admet une densité, montrer que \overline{A} admet une densité.
- d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $A = p\mathbb{N}^* = \{pn, n \in \mathbb{N}^*\}$ admet une densité.

2) Exemples

- Montrer que l'ensemble des carrés parfaits est de densité nulle.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que si A a une densité non nulle, alors pour n assez grand $A \cap [n, (1 + \varepsilon)n]$ est non vide.
- Donner un exemple d'une partie qui n'admet pas de densité.
- ★ Quelle est la densité de l'ensemble des entiers dont l'écriture décimale ne comporte aucun 9 ?

3) Densité vis-à-vis d'une partie.

Soit $B \subset \mathbb{N}^*$. On dit que $A \subset \mathbb{N}^*$ est de densité 1 dans B si $\frac{|A \cap B \cap \llbracket 1, n \rrbracket|}{|B \cap \llbracket 1, n \rrbracket|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

- Si B est fini, à quelle condition A est-elle de densité 1 dans B ?
- Si A est de densité 1 dans \mathbb{N} et B admet une densité $p > 0$ dans \mathbb{N} , montrer que A est de densité 1 dans B .
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $B_i = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \equiv i[p]\}$. Montrer que $A \subset \mathbb{N}^*$ est de densité 1 dans \mathbb{N}^* si et seulement si A est de densité 1 dans chacun des B_i .

II. ★ (D'après un oral X) Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ une partie admettant une densité $d > 0$. On pose $Q = \{\frac{a}{b}, a, b \in A\}$.

- Montrer que Q est dense dans \mathbb{R}_+ .
- On suppose que $d = 1$. Montrer que $Q = \mathbb{Q}_+^*$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une partie $A \subset \mathbb{N}^*$ de densité $d \geq 1 - \varepsilon$ avec $Q \neq \mathbb{Q}_+^*$.

Exercice 5. ♣ ★ Suites sous-additives. Soit (u_n) une suite positive vérifiant $\forall p, q \in \mathbb{N}, u_{p+q} \leq u_p + u_q$.

- Montrer que $\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ admet une borne inférieure m .
- Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $C_q \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \geq q, \quad \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_q}{q} + \frac{C_q}{n}.$$

- En déduire que la suite $(\frac{u_n}{n})$ converge vers m .

Indications Exercice 1.

I. 2) On ne peut pas montrer par récurrence la propriété $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \neq 0$. On peut éventuellement montrer une assertion plus forte par récurrence, ou chercher à utiliser la première question.

II. 1) Écrire $z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$.

III. 2) Utiliser $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Indications Exercice 2.

I. 1) Si (B_n) et (A_n) sont deux telles suites, montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $B_n = A_n$.

3) Que dire de $B_n(1) - B_n(0)$?

II. 1) Utiliser l'unicité de la première question.

Indications Exercice 3.

I. 2) a) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b f(t) dt = e^{i\theta} \left| \int_a^b f(t) dt \right|$.

b) Il s'agit de commencer par justifier que, pour $c \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \left(c \int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (cf(t)) dt$.

II. 1) b) On trouve $2\pi a_n$.

2) a) Il s'agit de justifier que l'ensemble $\{P(z), z \in \mathbb{U}\}$ est bornée, donc de majorer, pour $z \in \mathbb{U}$, $|P(z)|$, d'une manière indépendante de z .

b) Il s'agit de justifier que $\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, on a $|a_k| \leq \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |P(e^{i\theta})|$.

III. 1) c) Considérer le polynôme réel P^2 .

Indications Exercice 4.

I. 1) a) Pour obtenir $0 \leq d(A) \leq 1$, on écrit un encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $d_n(A)$, et on passe à la limite les inégalités.

c) Relier $d_n(A)$ et $d_n(\overline{A})$.

d) Donner une expression explicite de $d_n(A)$.

2) b) Par l'absurde, si $A \cap [n, (1 + \varepsilon)n] = \emptyset$, minorer $d_{\lfloor (1+\varepsilon)n \rfloor}$.

c) Prendre une partie qui contient tous les éléments entre 2^{2p} et 2^{2p+1} , et aucun élément entre 2^{2p+1} et $2^{2(p+2)}$. Justifier que cette partie n'admet pas de densité revient à montrer qu'une suite diverge, en explicitant deux suites extraites.

II. 1) Utiliser le fait que A intersecte $[n, (1 + \varepsilon)n]$ pour n assez grand.

2) Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, cela revient à montrer que pA intersecte qA .

Indications Exercice 5.

- Considérer la division euclidienne de n par q .
- Soit $\varepsilon > 0$.