

Facultatif : à partir du 5) de l'exercice 4.

Exercice 1. Soient A, B deux points distincts du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé dans lequel $A = (-a, 0)$ et $B = (a, 0)$, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On note \mathcal{C} l'ensemble des points M tels que $M = A, M = B$, ou $\text{Angle}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$.

1. On note z l'affixe de M . Montrer que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $(z - a)(\bar{z} + a)e^{-i\theta} \in \mathbb{R}$.
2. On pose $z = x + iy$. Dédurre de la question précédente une équation de \mathcal{C} de la forme $(x^2 + y^2) \sin \theta + \dots = 0$.
3. En déduire que si $\theta \neq 0[\pi]$, \mathcal{C} est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

Exercice 2. On considère la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z-1}{1-\bar{z}} \end{array} .$$

1. (a) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, que vaut $|f(z)|$?
(b) La fonction f est-elle surjective?
2. Résoudre l'équation $f(z) = 1$. La fonction f est-elle injective?
3. Étant donné $z \neq 1$, on note $M(z)$ le point image de z , et $M'(f(z))$ le point image de $f(z)$.
(a) Montrer que $\frac{f(z)-1}{z-1}$ est réel. Qu'en déduit-on sur la position du point M' par rapport à M ?
(b) Montrer que $\frac{f(z)+1}{z-1}$ est imaginaire pur. Qu'en déduit-on sur la position du point M' par rapport à M ?
(c) Donner deux constructions géométriques du point M' étant donné le point M .
4. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
5. Quelle est l'image de f ?

Exercice 3. Algorithme de Héron. Soit $a > 0$, on définit une suite (u_n) par $u_0 = \max(a, 1)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$.
3. En déduire une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de n et a .
4. Pour $a = 2$, montrer que $|u_n - \sqrt{a}| \leq (\frac{1}{4})^{2^n - 1}$. En utilisant $2^{10} \geq 10^3$, montrer que $|u_{12} - \sqrt{a}| \leq 10^{-2024}$.

Exercice 4. Suite logistique. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \lambda x(1-x)$, et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$, c'est-à-dire $\forall x \in I, f(x) \in I$.
Déterminer une CNS sur λ pour que $[0, 1]$ soit stable par f .
2. On suppose $\lambda \in [0, 1[$. Expliciter $\mu \in [0, 1[$ et $c \geq 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq c\mu^n$.
3. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.
(a) Représenter le graphe de la restriction de f à $[0, 1]$. Déterminer la limite de (u_n) .
(b) On suppose $u_0 \in]0, 1[$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)$. En admettant le lemme de Cesàro, en déduire que $nu_n \rightarrow 1$, c'est-à-dire $u_n \sim \frac{1}{n}$.
4. On suppose dans cette question que $1 < \lambda \leq 4$.
(a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]0, \alpha], f(x) \geq x$.
(b) En déduire que si la suite (u_n) converge vers 0, elle est stationnaire en 0.
(c) En déduire que si $\lambda < 4$ et $0 < u_0 < 1$, la suite (u_n) ne converge pas vers 0.
5. On suppose dans cette question que $\lambda = 4$.
Comme $u_0 \in [0, 1]$, il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $u_0 = \sin^2 \theta$.
(a) Déterminer une expression simple de u_n en fonction de n et θ .
(b) En utilisant la question 44b, déterminer l'ensemble A des valeurs de u_0 pour lesquelles (u_n) converge vers 0.
(c) Montrer que A est dense dans $[0, 1]$.
(d) Représenter l'allure des graphes de $f, f \circ f$ et $f \circ f \circ f$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner sans justifier le nombre de points fixes de $f^{(n)}$, et les expliciter.

Exercice 5. ★ On considère une application $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{C}, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

L'objectif est de montrer qu'il existe une constante $\ell_f \in \mathbb{C}$ telle que toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_f$.

I. Premiers cas.

- 1) Montrer le résultat dans le cas où f est une similitude directe.
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la composée n -ième $f^{(n)}$ vérifie $\forall x, y \in \mathbb{C}, |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \leq |x - y|$.
- 3) On suppose que $\frac{f^{(n)}(0)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_f$, où $f^{(n)}$ est la composée n -ième de f . Montrer le résultat recherché.

II. Suites sous-additives, et vitesse moyenne de fuite. On rappelle que si (v_n) est une suite réelle positive vérifiant $\forall p, q \in \mathbb{N}, v_{p+q} \leq v_p + v_q$, alors $(\frac{v_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\alpha = \inf\{\frac{v_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. En utilisant ce qui précède, montrer que $(\frac{|f^{(n)}(0)|}{n})$ converge vers une limite $\ell \geq 0$.

Conclure si $\ell = 0$.

■ Dans la suite, on note $f_n = |f^{(n)}(0)|$. On sait que $\frac{f_n}{n} \rightarrow \ell$ par valeurs supérieures, et on suppose $\ell > 0$.

III. Construction d'une extractrice.

- 1) Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \forall k \leq n, s_k \leq s_n.$$

- 2) Soit $0 < \lambda < \ell$. En appliquant la question précédente à la suite $s_n = f_n - \lambda n$, montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $\forall j \leq n, f_n \geq f_{n-j} + \lambda j$.
- 3) Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que

$$\forall n \geq 1, \forall j \leq \varphi(n), f_{\varphi(n)} \geq f_{\varphi(n)-j} + (\ell - \frac{\ell}{n+1})j.$$

IV. Détermination de la direction de fuite.

- 1) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $\operatorname{Re}(\omega z) = -|z|$.

■ On considère une suite $(\omega_n)_{n \geq 2} \in \mathbb{U}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \geq 2, \operatorname{Re}(\omega_n f^{(\varphi(n))}(0)) = -f_{\varphi(n)}$.

- 2) Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\forall j \leq \varphi(n), \operatorname{Re}(\omega_n f^{(j)}(0)) \leq |f^{(j)}(0) - f^{(\varphi(n))}(0)| - f_{\varphi(n)}.$$

En déduire que $\operatorname{Re}(\omega_n f^{(j)}(0)) \leq -(\ell - \frac{\ell}{n+1})j$.

- 3) Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{U}$ tel que $\forall j \in \mathbb{N}, \operatorname{Re}(\omega f^{(j)}(0)) \leq -\ell j$.
- 4) En déduire que $\frac{f^{(j)}(0)}{j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} -\ell \bar{\omega}$.

Indications Exercice 1.

1. Le cours donne $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$ si et seulement si $\arg \dots \equiv \theta[\pi]$, ce qui est équivalent à $\arg(\dots \times e^{-i\theta}) \equiv 0[\pi]$.
3. L'équation d'un cercle de rayon r de centre (a, b) est $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Étant donné une équation $x^2 + cx + y^2 + dy + e = 0$, on complète les carrés en $(x + c/2)^2$ et $(y + d/2)^2$ pour la mettre de la forme précédente.

Indications Exercice 2.

5. Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{U}$ par double inclusion. Il s'agit de justifier que pour $u \in \mathbb{U}$, on peut trouver un $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = u$.

Indications Exercice 3.

1. Faire l'étude de variation, du point fixe, et un dessin. Considérer l'intervalle $[\sqrt{a}, +\infty[$, qui est stable.
2. Vérifier que $|u_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2u_n}$.
3. Réécrire l'inégalité comme $\frac{|u_{n+1} - \sqrt{a}|}{2\sqrt{a}} \leq \left(\frac{|u_n - \sqrt{a}|}{2\sqrt{a}}\right)^2$. La suite $v_n = \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{2\sqrt{a}}$ vérifie donc une inégalité de récurrence simple.
4. On trouve finalement, à la question précédente, que $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2\sqrt{a} \left|\frac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right|^{2^n}$.

Indications Exercice 4.

3. (b) Appliquer le lemme de Cesàro à la suite $(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n})$.
4. (a) Pour x assez proche de 0 (à quantifier), on a $\lambda(1 - x) \geq 1$.
- (b) Si $(u_n) \rightarrow 0$, alors APCR, $u_n \in [0, \alpha]$.

Indications Exercice 5.

- I. 2) On peut par exemple montrer que la composée de deux fonctions 1-lipschitziennes est 1-lipschitzienne.