DM n°9

2ème page facultative, indications au dos. Exercice deux très classique, cf indication au dos.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 7 & 4 \\ 12 & -12 & -6 \end{pmatrix}$.

I. Détermination des vecteurs propres de A.

1) Résoudre le système $AX = \vec{0}$. Vérifier que l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(e_2)$, où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2) Résoudre le système $AX = X$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$. Vérifier que l'ensemble des solutions est $\mathrm{Vect}(e_1)$, où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On admet que l'ensemble des solutions du système $AX = 2X$ est $\mathrm{Vect}(e_3)$, où $e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$. Déterminer selon la valeur de λ si le système admet aucune, une seule, ou une infinité de solutions.

II. Diagonalisation de A. On considère la matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première colonne est e_1, la seconde est e_2 et la troisième est e_3.

1) Calculer l'inverse de P. On trouve une matrice à coefficients entiers.

2) En notant α l'application linéaire associée à A, et E_1, E_2, E_3 les vecteurs élémentaires de $\mathbb{R}^3$, que vaut $\rho(E_i)$? Que valent les $\rho^{-1}(\alpha(\rho(E_i)))$?

En déduire, ou vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale, que l'on note D. On trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Exprimer A^n en fonction de D^n, P et P^{-1}. Préciser l'expression de D^n.

III. Détermination des racines carrées de A. On appelle racine carrée de A toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. On considère $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $N = P^{-1}MP$.

1) Montrer que $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.

2) Montrer que si $N^2 = D$, N et D commutent.

3) En déduire que si $N^2 = D$, N est diagonale.

4) En déduire l'ensemble des racines carrées de D.

5) Montrer que $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & P^{-1}XP \end{array}$ est bijective. Quelle est son application réciproque ?

6) En déduire le cardinal de $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = A\}$.

7) ★ Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant une infinité de racines carrées.

8) ★ Donner un exemple d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'admettant aucune racine carrée (justifier brièvement).

Exercice 2. ♣ **Matrice à diagonale dominante**. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

1. Montrer que l'équation $AX = \vec{0}$ a une unique solution.

2. En déduire que A est inversible.

Exercice 3.

I. Matrices de permutations

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$.

Pour $\sigma \in S_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont la i-ième colonne est $E_{\sigma(i)}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1) Un morphisme de groupe.

a) Que dire de P_σ pour $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$?

b) Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, appelé symbole de Kronecker.

Justifier que $P_\sigma = \left(\delta_{i\sigma(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

c) Montrer que si $\sigma, \sigma' \in S_n$, $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

d) En déduire que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

e) Montrer que $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.

2) Conjugaison par une matrice de permutation. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\sigma \in S_n$, expliciter les coefficients de la matrice $B = P_\sigma^{-1} A P_\sigma = (b_{ij})$ en fonctions des (a_{ij}).

II. Concept d'irréductibilité.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est irréductible si pour toute partition $\{S, T\}$ de $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire $S, T \neq \varnothing$, disjoints et $S \cup T = [\![1, n]\!]$), il existe $i \in S$ et $j \in T$ tels que $a_{ij} \neq 0$.

Les questions sont indépendantes.

1) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de matrice de permutation P_σ telle que $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ soit de la forme

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} F & O_{p,n-p} \\ G & H \end{pmatrix},$$

où $F \in M_p(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $G \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$. Autrement dit, il existe $p \geqslant 1$ tel que les coefficients de $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ d'indices $i \leqslant p$ et $j \geqslant p+1$ sont nuls.

2) On veut montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement si elle vérifie la propriété (P): pour tout $i \neq j$, il existe une suite d'indices $i_0, \ldots, i_s$ vérifiant $(*)$ $i_0 = i$, $i_s = j$ et $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{s-1} i_s} \neq 0$.

a) Montrer que la condition (P) est suffisante.

b) On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ irréductible. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'ensemble X_i des indices $j \in [\![1, n]\!]$ différents de i pour lesquels il existe une suite d'indices $i_0, \ldots, i_s$ vérifiant $(*)$.

Montrer que $X_i = [\![1, n]\!] \backslash \{i\}$. En déduire que la condition est nécessaire.

3) À une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est $[\![1, n]\!]$ et deux sommets i, j sont reliés par une arête orientée si $a_{ij} \neq 0$.

Si $a_{ij} \neq 0$ et $a_{ji} \neq 0$, on met deux arêtes : une dans chaque sens. Si $a_{ii} \neq 0$, on met une boucle.

Pour les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tracer les graphes, et interpréter graphiquement le caractère réductible ou irréductible.

Exercice 4. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toutes les matrices inversibles.

Exercice 5. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_{ij}^k le coefficient d'indices (i, j) de A^k. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $d_i = \operatorname{pgcd}\{k \mid A_{ii}^k > 0\}$.

1. On suppose $\exists k, \forall i, j, A_{ij}^k > 0$. Montrer que $d_1 = 1$.

2. On suppose $\forall i, j, \exists k, A_{ij}^k > 0$. Montrer que les d_i sont égaux.

3. On suppose $\forall i, j, \exists k, A_{ij}^k > 0$, montrer que si $d_1 = 1$, alors $\exists k, \forall i, j, A_{ij}^k > 0$.

Indications Exercice 1.

I. **3)** Il n'est pas nécessaire de résoudre intégralement le système. Un fois mis sous forme échelonnée par ligne, on compte le nombre de pivots.

III. **3)** En prenant A une matrice quelconque (nommer ses coefficients), déterminer quelles sont les matrices A qui commutent avec D.

5) On pourra raisonner par équivalence, en partant d'une égalité $\varphi(X) = Y$.

7) Prendre la matrice nulle.

8) Prendre une matrice diagonale particulière.

Indications Exercice 2.

1. Si X est une solution non nulle, écrire les équations. Considérer une équation particulière, en choisissant i tel que $|x_i| \ldots$

$= \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$.

Indications Exercice 3.

II. **1)** Si $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ est de la forme donnée, quels sont les coefficients nuls de A ? En déduire deux ensembles S, T qui contredisent l'irréductibilité.

2) **a)** Il s'agit de montrer que si (P) est vérifiée, alors pour toute partition $S, T \ldots$ Appliquer (P) à $i \in S$ et $j \in T$.

Indications Exercice 4. On pourra utiliser sans justifier tout résultat vu par le passé.

Indications Exercice 5.

2. Il faut interpréter la stricte positivité des coefficients en termes de chemins sur des graphes : à A on peut associer un graphe à n sommets tel que $i \to j \Leftrightarrow A_{ij} \neq 0$. Alors $A_{ij}^k \neq 0$ si et seulement s'il existe un chemin de longueur k entre les sommets i et j.

3. On pourra admettre (ou démontrer) que si $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble, tout entier assez grand peut s'écrire comme combinaison linéaire des a_i à coefficients entiers positifs.