DM n°9

Facultatif : Ex 3 : II). Le II)1) est très classique.

Exercice 1.

I. On considère l'équation $(H)\colon\ y'' + \varepsilon y' + \omega_0^2 y = 0$, où $\varepsilon > 0, \omega_0 > 0$. On note λ et μ les solutions complexes de l'équation caractéristique $X^2 + \varepsilon X + \omega_0^2 = 0$.

1) Que valent $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$?

2) On suppose que λ, μ sont réels et distincts. Donner la forme des solutions réelles de (H) en fonction de λ et μ. Justifier que λ et μ sont de même signe. En déduire que toutes les solutions de (H) tendent vers 0 en $+\infty$.

3) On suppose que $\lambda = \mu$. Quelle relation a-t-on entre ε et ω_0 ? Exprimer λ en fonction de ε. Donner la forme des solutions de (H) et montrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

4) On suppose que λ et μ ne sont pas réelles. Exprimer λ et μ en fonction de ε et de $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$ (Justifier que $\omega_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \geqslant 0$). Donner la forme des solutions de (H). Montrer qu'elles tendent toutes vers 0 en $+\infty$.

II. On considère à présent l'équation $(E)\colon\ y'' + \varepsilon y' + \omega_0^2 y = h\cos(\omega t)$, où $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $\omega \geqslant 0$ et l'équation complexifiée $(E_\mathbb{C})\colon\ y'' + \varepsilon y' + \omega_0^2 y = he^{i\omega t}$.

1) Déterminer une solution particulière complexe z_P de $(E_\mathbb{C})$.

2) Soit $K = \frac{h}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega} \neq 0$. On considère une forme exponentielle $K = Ae^{-i\varphi}$ de K, où $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in [0,2\pi[$. Exprimer A et $\tan\varphi$ en fonction de $h, \omega, \varepsilon, \omega_0$. Justifier que $\varphi \in [0,\pi]$.

3) Donner l'expression d'une solution particulière réelle y_P de (E) en fonction de A, ω, φ. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) ? En déduire que si y est une autre solution de (E), on a $|y(t) - y_P(t)| \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

4) ★ Dans un problème d'origine physique, on peut écrire $h = r\omega^2$, où r est l'amplitude du mouvement de l'excitateur, et ω sa pulsation. On suppose également que $\frac{\varepsilon}{\omega_0}$ est «petit» par rapport à 1 (faiblesse des frottements). Exprimer A en fonction de $\omega, \varepsilon, \omega_0, r$. On considère ε, ω_0, r fixés et A comme une fonction de ω. Déterminer pour quelle valeur de ω est-ce que A est maximal. On pourra poser $u = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

Exercice 2. Déterminant dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et étude du groupe $GL_2(\mathbb{Z})$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que $\quad A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$.

On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA = I_2$.

2) En déduire que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
Si A est inversible, justifier que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\big((a+d)I_2 - A\big).$$

Pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on note $\det A = ad - bc$, appelé déterminant de la matrice A. D'après la question précédente, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

3) Montrer que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \det(AB) = \det A \det B.$$

4) Pour A inversible, montrer que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

5) Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$. Montrer que A est inversible et $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.

6) On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices 2-2 inversibles à coefficients entiers dont l'inverse est à coefficients entiers. Justifier que pour $A, B \in GL_2(\mathbb{Z})$, $A^{-1} \in GL_2(\mathbb{Z})$ et $AB \in GL_2(\mathbb{Z})$.

7) On note $A\mathbb{Z}^2 = \{AX,\ X \in \mathbb{Z}^2\} = \left\{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{Z}\right\}$.

a) Montrer que $A\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ si et seulement si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

b) Montrer que $A\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}^2$ si et seulement si $A \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 3.

I. Matrices de permutations

On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire des bijections de $[\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$.

Pour $\sigma \in S_n$, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont la i-ième colonne est $E_{\sigma(i)}$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

1) Un morphisme de groupe.

a) Que dire de P_σ pour $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$?

b) Pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, on note $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, appelé symbole de Kronecker.

Justifier que $P_\sigma = \big(\delta_{i\sigma(j)}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

c) Montrer que si $\sigma, \sigma' \in S_n$, $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.

d) En déduire que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

e) Montrer que $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T$.

2) Conjugaison par une matrice de permutation.

a) On considère la permutation de $[\![1, 3]\!]$ donnée par $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$ et $\sigma(3) = 1$.
Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ quelconque, expliciter $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$, en fonction des coefficients de A.

b) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\sigma \in S_n$, expliciter les coefficients de la matrice $B = P_\sigma^{-1} A P_\sigma = (b_{ij})$ en fonctions des (a_{ij}).

II. Matrices à diagonales dominantes.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

On dit que A est à diagonale dominante si

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{et} \qquad \exists i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante et $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = \vec{0}$.
Soit i un indice tel que $|x_i| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. En considérant la i-ième ligne du produit AX, montrer que $X = \vec{0}$.
Un résultat de la fin du chapitre permet d'en déduire que A est inversible.

2) Soit A à diagonale dominante. On suppose que A vérifie la condition d'irréductibilité $\mathcal{P}$ suivante : pour tous $i \neq j$, il existe une suite d'indices $i_0, \ldots, i_s$ vérifiant $(*)$ $i_0 = i$, $i_s = j$ et $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{s-1} i_s} \neq 0$.

a) Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| > 0$.

b) En raisonnant comme dans la question précédente, montrer que A est inversible.

III. ★ Concept d'irréductibilité.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est irréductible si pour toute partition $\{S, T\}$ de $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire $S, T \neq \varnothing$, disjoints et $S \cup T = [\![1, n]\!]$), il existe $i \in S$ et $j \in T$ tels que $a_{ij} \neq 0$.

Les questions sont indépendantes.

1) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de matrice de permutation P_σ telle que $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ soit de la forme

$$P_\sigma^{-1} A P_\sigma = \begin{pmatrix} F & O_{p,n-p} \\ G & H \end{pmatrix},$$

où $F \in M_p(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $G \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$. Autrement dit, il existe $p \geqslant 1$ tel que les coefficients de $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ d'indices $i \leqslant p$ et $j \geqslant p + 1$ sont nuls.

2) On veut montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est irréductible si et seulement si elle vérifie la propriété (P): pour tout $i \neq j$, il existe une suite d'indices $i_0, \ldots, i_s$ vérifiant $(*)$ $i_0 = i$, $i_s = j$ et $a_{i_0 i_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{s-1} i_s} \neq 0$.

a) Montrer que la condition (P) est suffisante.

b) On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ irréductible. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'ensemble X_i des indices $j \in [\![1, n]\!]$ différents de i pour lesquels il existe une suite d'indices $i_0, \ldots, i_s$ vérifiant $(*)$.
Montrer que $X_i = [\![1, n]\!] \backslash \{i\}$. En déduire que la condition est nécessaire.

3) À une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est $[\![1, n]\!]$ et deux sommets i, j sont reliés par une arête orientée si $a_{ij} \neq 0$.
Si $a_{ij} \neq 0$ et $a_{ji} \neq 0$, on met deux arêtes : une dans chaque sens. Si $a_{ii} \neq 0$, on met une boucle.
Pour les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tracer les graphes, et interpréter graphiquement le caractère réductible ou irréductible.

Indications Exercice 2.

5) Pour une implication, utiliser la question 2, et pour l'autre la question 4.

6) On montre que c'est un sous-groupe de l'ensemble des matrices inversibles.

Indications Exercice 3.

III. **1)** Si $P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ est de la forme donnée, quels sont les coefficients nuls de A ? En déduire deux ensembles S, T qui contredisent l'irréductibilité.

2) **a)** Il s'agit de montrer que si (P) est vérifiée, alors pour toute partition $S, T\ldots$ Appliquer (P) à $i \in S$ et $j \in T$.