DM n°11

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note P_n le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right).$$

1. Vérifier que $P_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$. Sont-ils irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Montrer que $P_n \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Donner son degré et son coefficient dominant.
3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$a \text{ racine de } P_n \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, 2n]\!],\ a\left(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1\right) = i\left(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1\right).$$

4. Déterminer les racines de P_n, et vérifier qu'elles sont réelles.
5. En développant P_n, déterminer un polynôme Q_n de degré n à coefficients réels tel que $P_n(X) = Q_n(X^2)$.
6. Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.
7. On considère

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que $S_n = \frac{n(2n-1)}{3}$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{R}[X]$, on considère (E_n): $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $z^n + \frac{1}{z^n} = P(z + \frac{1}{z})$.

1. Déterminer des polynômes P_1 et P_2 vérifiant respectivement (E_1) et (E_2).
2. Montrer que pour $n \geqslant 1$, il existe au plus un polynôme P vérifiant (E_n).
3. On donne la relation $\forall n \geqslant 1$, $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} = (z + \frac{1}{z})(z^n + \frac{1}{z^n}) - (z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}})$.
   (a) En déduire l'expression de P_3, vérifiant (E_3).
   (b) Plus généralement, donner une relation de récurrence d'ordre 2 définissant une suite (P_n) de polynômes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n vérifie (E_n).
4. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.
5. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines dans $[-2,2]$.

Exercice 3. Approximations rationnelles de nombres algébriques.

I. Mauvaises approximations rationnelles des nombres algébriques.

On dit qu'un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ est algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients entiers dont il est racine, c'est-à-dire vérifiant $P(\theta) = 0$.

Si θ est algébrique, parmi les polynômes non nuls à coefficients entiers dont il est racine, on en note P_θ un quelconque de degré minimal.

1) Préliminaires

a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique, et donner sans justifier un nombre algébrique irrationnel.

b) Montrer que $\theta \in \mathbb{R}$ est algébrique si et seulement si θ est racine d'un polynôme non nul unitaire à coefficients rationnels.

c) Soit θ irrationnel et algébrique, montrer que $\deg P_\theta \geqslant 2$.

2) On considère à présent θ irrationnel et algébrique. On note $P_\theta = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec d le degré de P.

a) Montrer que P_θ n'admet aucune racine rationnelle.

b) En déduire que pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|P_\theta\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^d}$.

c) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et si f' est bornée par K sur $[a, b]$, alors f est K-lipschitzienne.

En déduire que si P est une fonction polynomiale, il existe une constante K tel que P soit K-lipschitzienne sur $[a, b]$.

d) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant 1 \Rightarrow \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{q^d}.$$

e) En déduire qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C'}{q^d}.$$

II. Application : Transcendance d'un nombre de Liouville.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}.$$

1) Montrer que (u_n) converge.

On note $L = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ sa limite.

2) Montrer que pour $n \leqslant N$.
$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{10^{k!}} \leqslant \frac{1}{9 \times 10^{n!-1}}$$

En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - L| \leqslant \frac{1}{9 \times 10^{(n+1)!-1}}.$$

3) Que dire du développement décimal d'un nombre rationnel ? En déduire que L est irrationnel.

4) Montrer que L est transcendant, c'est-à-dire que L n'est pas un nombre algébrique.

III. Application à l'étude d'une suite.

1) En utilisant une propriété de convexité/concavité, montrer que
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

2) Montrer que $\frac{1}{n^3 \sin(\sqrt{2}\pi n)} \to 0$

Exercice 4. ★ Montrer que $\{\cos n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. ★ Si $P = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$ est un polynôme réel, on note $P(A) = \sum_{k=0}^{d} b_k A^k$, appelé polynôme en A.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un polynôme P non nul de degré $\leqslant n^2$ tel que $P(A) = O_n$.

2. Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A^{-1} = P(A)$.

Exercice 6. ★ Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose $X^{-1} = \left\{x^{-1}, x \in X\right\}$ et $XY = \{xy, (x, y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G. On suppose que $|XX| < 2|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.

Exercice 7. ★ Soient G un groupe et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini.

1. En considérant des matrices de la forme $T_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, montrer qu'en général, T n'est pas forcément un sous-groupe de G.

2. Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Montrer que, pour tous s_1,..., $s_r \in S$, il existe s'_1,..., $s'_r \in S$ tels que $s'_1 \leqslant s'_2 \cdots \leqslant s'_r$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s'_1 s'_2 \cdots s'_r$.

3. Avec la question précédente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G.

Indications Exercice 2.

2. On montre que si on en prend deux, la différence est le polynôme nul.

4. Trouver z tel que $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$. On obtient $P_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.

5. Utiliser la question précédente pour trouver n racines de P_n.

Indications Exercice 3.

I. 2) a) Dans le cas contraire, contredire la minimalité du degré de P_θ.

b) Mettre la quantité $P_\theta\left(\frac{p}{q}\right)$ sur un dénominateur commun.

c) Pour la première partie, $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,dt$.

Pour la seconde partie, noter $c = \max(|a|, |b|)$, et majorer $|P'(x)|$ par une constante (qui ne dépend pas de x).

d) Utiliser la question précédente.

II. 2) Pour la deuxième partie, majorer $|u_n - u_N|$, pour $N \geqslant n$, et faire tendre N vers $+\infty$.

3) Par l'absurde, si qL est un entier, alors $|qu_n - qL|$ est un multiple de $\frac{1}{10^{n!}}$.

III. 2) En notant p l'entier le plus proche de $\sqrt{2}n$, on a $|\sin(\sqrt{2}\pi n)| = \left|\sin(\sqrt{2}\pi n - p\pi)\right| \geqslant \ldots$.

Indications Exercice 5.

1. Se ramener à la résolution d'un système linéaire.

Indications Exercice 6. Comment utiliser l'hypothèse : Si on trouve deux parties de XX de cardinal $|X|$, elle devront avoir une intersection non vide.

Indications Exercice 7.

2. Traiter le cas $r = 2$. On part d'un produit $s_1 s_2$. Si $s_1 \leqslant s_2$, c'est bon. Sinon, $s_2 < s_1$, on peut écrire $s_1 s_2 = s_2 s_2^{-1} s_1 s_2 = s_2(s_2^{-1} s_1 s_2)$: on a mis s_2 en premier !