DM n°12

À aborder : Ex 1,2,3 + II)1) de l'ex 4.

Exercice 1. Théorème des cordes universelles. Soit $n \geqslant 2$ et $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$.

1) On considère $g\colon \begin{array}{ccc} \left[0,1-\frac{1}{n}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+\frac{1}{n}) - f(x) \end{array}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})$.

2) Montrer qu'il existe $x \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$.

3) Un coureur court 6 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes pendant lequel il a couru exactement 1 km.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On considère la fonction $f^*\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f^*\colon x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

I. 1) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de degré n, et $f\colon x \mapsto P(x)$. Expliciter f^*.

2) Considérons dans cette question $f\colon x \to |\sin x|$.

a) Calculer $f^*(n\pi)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, encadrer $f^*(x)$ en fonction de $\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor$. En déduire la limite de f^* en $+\infty$.

3) Considérons dans cette question $f\colon x \mapsto \sqrt{x}\sin x$.

a) Montrer que f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b) À l'aide d'une IPP, montrer que f^* tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

II. Propriétés de f^*

On considère à présent le cas général.

1) Montrer que f^* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que f^* est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que si f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors f^* admet la même limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$ et $S_0 = 1$, et on considère l'application $\Delta\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

I. L'application Δ. Quel est le degré de S_n ? Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $\Delta(S_{n+1}) = S_n$.

II. Les S_n forment une base de $\mathbb{R}[X]$.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P - \alpha S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k S_k$.

III. Polynômes à valeurs entières.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.

1) Montrer que pour tout $P \in \mathcal{E}$, $\Delta(P) \in \mathcal{E}$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \in \mathcal{E}$.

3) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k S_k \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P \in \mathcal{E}$ si et seulement si $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. ★ Factorisation des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$.

Soit p un nombre premier, et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$. On note, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\overline{a_k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la classe de a_k modulo p, et $\overline{P} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^k \in \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)[X]$. On pourra utiliser les propriétés suivantes.

(i) $\mathbb{Z}[X] \to \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)[X]$ $\quad P \mapsto \overline{P}$ est un morphisme d'anneaux c'est-à-dire $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$ et $\overline{PQ} = \overline{P}\,\overline{Q}$.

(ii) Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, l'anneau $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)[X]$ est intègre.

I. Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$, on note $C(P)$ le pgcd des coefficients de P.

1) Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ et p un nombre premier. En se plaçant dans l'anneau intègre $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, montrer que si p est un nombre premier qui divise tous les coefficients de AB, alors p divise tous les coefficients de A ou tous les coefficients de B.

2) Montrer que pour $A, B \in \mathbb{Z}[X]$, si $C(A) = C(B) = 1$ alors $C(AB) = 1$. En déduire qu'en général $C(AB) = C(A)C(B)$.

3) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que si P est non irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, alors P est le produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$.

Dans $\mathbb{Q}[X]$, tout polynôme P se décompose de manière unique en produit de plos irréductibles. D'après ce qui précède, si $P \in \mathbb{Z}[X]$, sa décomposition en irréductibles peut être choisie avec des polynômes à coefficients entiers.

II. On s'intéresse à la factorisation dans $\mathbb{Q}[X]$ (donc dans $\mathbb{Z}[X]$) d'un polynôme $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_0$ de degré n à coefficients entiers.

1) Montrer que si $\frac{p}{q}$ est racine de P, avec $p \wedge q = 1$, alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

En particulier, on peut déterminer toutes les racines rationnelles de P en essayant un nombre fini de possibilités.

2) Montrer que toute racine $z \in \mathbb{C}$ de P vérifie $|z| \leqslant R = \max(1, \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|)$

3) Soit $Q = b_m X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré m divisant P dans $\mathbb{Z}[X]$. Que peut-on dire de b_m rapport à a_n ? Montrer que, pour tout $i \in [\![0, m-1]\!]$, $\left|\frac{b_i}{b_m}\right| \leqslant \binom{m}{i} R^{m-i}$.

4) En déduire qu'un nombre fini d'essais permet de déterminer tous les facteurs irréductibles de P.

Contrairement au cas des polynômes réels ou complexes, que l'on ne peut factoriser dans le cas général pour un degré $\geqslant 5$, on sait trouver la décomposition de tout polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.

5) On suppose qu'il existe un entier $m > R+1$ tel que $P(m)$ est un nombre premier. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

III. Critère d'irréductibilité d'Eisenstein.

Soit p un nombre premier.

1) Soit $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que $\forall i \in [\![0, n-1]\!], p \mid a_i$ et que p^2 ne divise pas a_0, et p ne divise pas a_n. En se plaçant dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, montrer que A est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

2) En posant $X = Y + 1$, montrer que $B(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

IV. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et polynômes cyclotomiques.

1) Soit $B \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{Z}[X]$, il existe $(Q, R) \in \mathbb{Z}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$, avec $\deg R < \deg B$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\Phi_n = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \operatorname{pgcd}(k,n)=1}} \left(X - \omega^k\right) \qquad \text{où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad \varphi(n) = \operatorname{Card}\{k \in [\![1, n]\!] \mid k \wedge n = 1\}.$$

a) Expliciter Φ_p, pour p premier.

b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d.$$

Qu'en déduire sur $\sum_{d \mid n} \varphi(d)$?

c) En déduire que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

V. ★ Irréducibilité de Φ_n.

Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $\Phi_n = AB$, avec $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ et A irréductible. On fixe ζ une racine de A.

1) Soit p un nombre premier ne divisant pas n. On veut montrer que ζ^p est racine de A. On raisonne par l'absurde.

a) Montrer que ζ^p est racine de B.

b) En déduire que $A \mid B \circ X^p$.

c) En utilisant le fait que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$, montrer que $B \circ X^p \equiv B^p [p]$.

d) Soit $R \in \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)[X]$ un facteur irréductible de $\overline{A}$.

i) Montrer que $R^2 \mid \overline{X^n - 1}$.

ii) En considérant la dérivée de $X^n - 1$, aboutir à une contradiction.

2) Montrer que Φ_n est irréductible.

Indications Exercice 1.

1) On trouve 0

2) Si une somme de nombres réels est nulle, un de ces nombres est positif ou nul, et un des nombres est négatif ou nul (pourquoi ?).

3) Introduire une fonction à laquelle appliquer la question précédente.

Indications Exercice 2.

I. 2) b) $\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$ est l'entier n tel que $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$.

3) b) Après une IPP judicieuse, majorer l'intégrale restante.

Indications Exercice 3.

II. b) Si P est de degré n, lui retirer ... pour se ramener à un polynôme de degré $n-1$.

III. 2) Pour $m \geqslant n$, exprimer $S_n(m)$ comme un coefficient binomial.

Indications Exercice 4.

I. 2) On montre une double divisibilité : $C(AB) \mid C(A)C(B)$ et $C(A)C(B) \mid C(AB)$. Une des deux est claire. Pour l'autre, on peut se ramener au cas où $C(A) = C(B) = 1$, et utiliser la question précédente.

II. 2) Si $|z| \geqslant 1$, montrer que $|z| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|a_n|}$, en utilisant entre autres $|z|^i \leqslant |z|^n$.

3) Comprendre les relations coefficients-racines : en particulier, combien de termes y a-t-il dans la somme ? $\binom{n}{k}$ est le nombre de façon de choisir k éléments parmi n.

IV. 1) Dans l'ensemble $I = \{A - BQ,\ Q \in \mathbb{Z}[X]\}$, considérer un polynôme A' de degré minimal. Si $\deg A' \geqslant \deg B$, alors construire un élément de I de degré $< \deg A'$.