DM n°13

Facultatifs : Ex 1 pour le 1er tiers de la classe ; À partir du 4) de l'Ex 4.
La fin de l'ex 4 est compliquée. L'exercice 5 est intéressant pour la première moitié de la classe.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $]0,2\pi]$ par $f(x) = \sin\left(xE(\frac{\pi}{x})\right)$.

1. Montrer que pour $x > 0$, $|xE(\frac{1}{x}) - 1| \leqslant x$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} xE(\frac{1}{x})$, puis la limite de f en 0.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = k$. En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in \left]\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}\right]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{k}^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{k}^+} f(x)$.

4. Montrer que f est décroissante sur chacun des intervalles $\left]\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}\right]$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_k = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{k}^+} f(x)$. Montrer que les points $M_k(\frac{\pi}{k}, y_k)$ appartiennent au graphe d'une fonction que l'on précisera. Dessiner ce graphe ainsi que le graphe de la restriction de f à l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$.

Exercice 2. On pourra utiliser le fait que la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge et que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$.

1. Soit $a > 0$ et $f\colon x \mapsto x^a \ln x$. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f son prolongement.

2. Justifier que $\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to 0^+]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et calculer cette valeur.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}$, définie sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. On rappelle que $\frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 1$. Montrer que g_n admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}_+$, que l'on note h_n.

4. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant h_n(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer $I_{n+1} - I_n$.

6. ★ Montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

7. En déduire la valeur de I_0.

Exercice 3. Théorème des cordes universelles.

Soit $n \geqslant 2$ et $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$.

I. **1)** On considère

$$g\colon \begin{array}{ccc} \left[0,1-\frac{1}{n}\right] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+\frac{1}{n}) - f(x) \end{array}.$$

Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})$.

2) Montrer qu'il existe $x \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x+\frac{1}{n}) = f(x)$.

3) Un coureur court 6 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes pendant lequel il a couru exactement 1 km.

4) ★ Donner un contre-exemple en remplaçant $\frac{1}{n}$ par $\alpha \in [0,1]$ quelconque. (Par exemple pour $\alpha = \frac{3}{4}$).

II. On note A l'ensemble des $a \in [0,1]$ pour lesquels il existe $x \in [0,1-a]$ tel que $f(x+a) = f(x)$.

1) Expliciter A pour $f\colon x \mapsto \sin(2\pi x)$.

2) On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que $\forall x \in]0,1[$, $f(x) > 0$. Montrer que $A = [0,1]$.

3) Montrer que dans le cas général, il existe $c > 0$ tel que $[0,c] \subset A$.

Exercice 4. Éléments de topologie de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une partie O de $\mathbb{R}$ est ouverte si pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O$.

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée si elle est stable par passage à la limite : pour toute suite $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ, on a $\ell \in F$.

1. Montrer que toute réunion d'ouvert est un ouvert. On notera $\bigcup_{i\in I} O_i$ la réunion d'une famille $(O_i)_{i\in I}$ quelconque.

2. Montrer que $F \subset \mathbb{R}$ est fermée si et seulement si son complémentaire $\overline{F}$ est ouvert.

3. Montrer que l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un ouvert.

Réciproquement, si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, f est continue.

4. ★ Propriété de Borel-Lebesgue

Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'intervalles ouverts recouvrant $[0,1]$, c'est-à-dire telle que $[0,1] \subset \bigcup_{i\in I} O_i$. Montrer qu'il existe une famille finie $J \subset I$ tel que $[0,1] \subset \bigcup_{i\in J} O_i$ *La propriété persiste si les O_i sont des ouverts, plutôt que des intervalles ouverts. Autrement dit, de tout recouvrement d'un segment par des ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.*

5. Connexité de $\mathbb{R}$

Montrer que $\varnothing$ et $\mathbb{R}$ sont les seules parties de $\mathbb{R}$ à la fois ouvertes et fermées.

6. Propriété de Baire

Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense : si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ouverts denses dans $\mathbb{R}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense.

7. Ouverts de $\mathbb{R}$

Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une famille finie ou dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 5. ★ Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\varphi\colon x \mapsto \sup\limits_{[0,x]} f$ est continue.

Exercice 6. ★ Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x+1)-f(x) \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

Exercice 7. ★ Soit $n \geqslant 1$ et $f_1, f_2, \dots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonction périodiques. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = 0.$$

Montrer que $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = \tilde{0}$.

Indications Exercice 1.

1. Commencer par encadrer $xE(\frac{1}{x}) - 1$.

2. Utiliser que pour $k \in \mathbb{Z}$, $E(x) = k \Leftrightarrow x \in [k,k+1[$. Finalement, on trouve que pour x dans l'intervalle donné, on a $f(x) = \sin(kx)$

Indications Exercice 2.

2. Invoquer la continuité d'une certaine fonction.

6. Utiliser $\int |fg| \leqslant \sup |f| \int |g|$.

7. À l'aide d'une question précédente, exprimer I_n en fonction de I_0.

Indications Exercice 3.

I. **1)** On trouve 0

2) Cela revient à montrer qu'il existe $x \in \left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ tel que $g(x) = 0$. Si une somme de nombres réels est nulle, un de ces nombres est positif ou nul, et un des nombres est négatif ou nul (pourquoi ?).

3) Introduire une fonction à laquelle appliquer la question précédente.

Indications Exercice 4.

4. Ou bien choisir des intervalles petit à petit, pour recouvrir une partie $[0,\alpha_n[$, de plus en plus grande : On choisit à chaque étape «l'intervalle qui permet d'aller le plus loin» (qui n'existe pas, mais en notant β la borne sup des α_{n+1} possibles, on peut choisir α_{n+1} de sorte que $\alpha_{n+1} - \alpha_n \geqslant \frac{\beta-\alpha_n}{2}$ par exemple). Supposer par l'absurde que la construction ne permet pas d'atteindre 1.

Ou bien introduire α la borne supérieure de l'ensemble des a tels que $[0,a]$ puisse être recouvert par un nombre fini d'intervalles.

5. Si A est ouverte et fermée, pour $x \in A$, considérer $B = \{y \geqslant x \mid [x,y] \subset A\}$.

7. Introduire une relation d'équivalence. Au final, les intervalles ouverts trouvés seront les classes d'équivalences.

Indications Exercice 5. Faire une disjonction, de deux cas, pour montrer la continuité en x_0.

Indications Exercice 6. On pourra écrire, pour certaines valeurs de n,

$$f(x) = \big(f(x) - f(x-1)\big) + \big(f(x-1) - f(x-2)\big) + \cdots + \big(f(x-n+1)f(x-n)\big) + f(x-n).$$