DM n°14

Facultatif : À partir de II)3) de l'exercice 2, et les oraux à partir de Mines/Centrale.

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^4 + x^3 = n$ admet une unique solution $x \geqslant 0$, que l'on notera x_n.
2. Montrer que (x_n) est croissante.
3. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
4. Montrer que $x_n \sim_{+\infty} n^{1/4}$.
5. Montrer que $x_n^4 = n - n^{3/4} + o_{+\infty}\left(n^{3/4}\right)$
6. En déduire que $x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + o_{+\infty}(1)$.
7. Montrer que $x_n = n^{1/4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32}n^{-1/4} + o_{+\infty}(n^{-1/4})$.

Exercice 2. Théorème de Weierstrass. L'objectif est de démontrer le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass : si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on peut approcher f uniformément par des fonctions polynomiales, au sens où pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f(t) - P(t)| \leqslant \varepsilon$.

I. Noyaux trigonométriques

1) Construction.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $F_n\colon \theta \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell\theta}$.

a) Justifier que F_n est à valeurs réelles, qu'elle est continue, paire et 2π-périodique, et que $\int_0^{2\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

b) Pour $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, calculer $\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell\theta}$, puis montrer que $F_n(\theta) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2$.

Le noyau de Féjer F_n est une approximation de l'unité : une suite de fonctions positives, de moyennes 1, dont le poids est de plus en plus concentré autour de 0 (en particulier, $F_n(0) = n \to +\infty$).

On note $K_n = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)^2\,\mathrm{d}t > 0$ et $J_n = \frac{1}{K_n}F_n^2$, de sorte que $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

c) ★ Montrer qu'il existe $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \cos(kt).$$

puis qu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_{2n-2} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ J_n(t) = \sum_{k=0}^{2n-2} a_k \cos(kt).$$

2) Préliminaires classiques.

a) Factoriser l'expression trigonométrique $\cos(k(\theta+t)) + \cos(k(\theta-t))$.

b) On considère une fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

i) Montrer que si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

ii) Montrer que si f est T-périodique, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On rappelle qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

3) Convolution par J_n.

a) En utilisant la périodicité de J_n, montrer que pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\big(\cos(\theta - t)\big)J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\big(J_n(\theta+t) + J_n(\theta-t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

b) En utilisant la question I.1)c) et les polynômes de Tchebychev, en déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{2n-2}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad Q(\cos\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\cos(\theta - t)\big)J_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction J_n étant une approximation de l'unité, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f\big(\cos(\theta-t)\big)J_n(t)\,\mathrm{d}t$ est une moyenne des valeurs de f, fortement concentré en $t = 0$, elle devrait être proche de $f(\cos\theta)$, et le polynôme Q trouvé devrait approcher f de manière uniforme.

II. Estimation asymptotique d'une intégrale.

On rappelle que $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. On va quantifier le fait que l'intégrale de la fonction J_n est concentrée au voisinage de 0, en montrant que la quantité $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} |t|J_n(t)\,\mathrm{d}t$ est en $O(\frac{1}{n})$.

1) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\int_0^\pi t F_n(t)^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^\pi F_n(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$
2) Majoration du numérateur.

a) Montrer que la suite $u_n = \int_1^{n\pi/2} \frac{\sin^4 u}{u^3}\,du$ est croissante, et en déduire qu'elle converge.

b) On note $v_n = \int_0^\pi \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{t^3}\,dt$. Justifier qu'on peut donner un sens à cette intégrale, puis que $v_n = O(n^2)$.

c) En utilisant une inégalité de concavité, montrer que $\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin u \geqslant \frac{2u}{\pi}$.

d) En déduire que $\int_0^\pi t F_n(t)^2\,\mathrm{d}t = O_{n\to+\infty}(1)$.

3) Minoration du dénominateur.

a) Justifier l'existence des intégrales, et montrer que
$$\forall n \geqslant 1, \quad \int_0^\pi \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{t^4}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n^3}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 u}{u^4}\,\mathrm{d}u.$$
b) En déduire que $\frac{1}{\int_0^\pi F_n(t)^2\,\mathrm{d}t} = O(\frac{1}{n})$.

On en déduit que $I_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

III. Théorème de Weierstrass.

Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

1) Dans cette question uniquement, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. On rappelle que $\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\left| f(\cos\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\cos(\theta - t)\big) J_n(t) \right| \leqslant \sup_{[-1,1]} |f'(t)|\, I_n.$$
En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [-1,1]$, $|f(x) - Q(x)| \leqslant \varepsilon$.

2) Module d'uniforme continuité.
Pour $h \in \mathbb{R}_+$, on note
$$\omega_f(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|,\ x, y \in [-1,1] \text{ tq } |x - y| \leqslant h\}.$$
a) Justifier que ω_f définit une fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

b) Montrer que ω_f est croissante.

c) Montrer que $\forall \alpha, \beta \geqslant 0$, $\omega_f(\alpha + \beta) \leqslant \omega_f(\alpha) + \omega_f(\beta)$.

d) Montrer que pour tout $\lambda, h \in \mathbb{R}_+$ $\omega_f(\lambda h) \leqslant (\lambda + 1)\omega_f(h)$.

3) Majoration de l'erreur d'approximation.

a) Montrer que
$$\forall t, \theta \in \mathbb{R}, \quad \omega_f(|\cos\theta - \cos(\theta - t)|) \leqslant (n|t| + 1)\omega_f\left(\frac{1}{n}\right).$$
b) En déduire qu'il existe $a > 0$, indépendante de f et n telle que
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \left| f(\cos\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} f\big(\cos(\theta - t)\big) J_n(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant a\omega_f\left(\frac{1}{n}\right).$$
c) En déduire le théorème de Weierstrass pour toute fonction $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ continue.

d) En déduire le théorème de Weierstrass pour toute fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Indications Exercice 1.

2. Noter $f\colon x \mapsto x^4 + x^3$. Quelles relations peut-on écrire entre x_n, x_{n+1} et f. Puis utiliser une propriété de f.

3. On peut raisonner par l'absurde.

4. Écrire une égalité faisant intervenir x_n. Donner un équivalent de ce qui est a droite, et un de ce qui est à gauche. Ces deux équivalents doivent être équivalents.

5. Justifier.

6. Utiliser l'égalité précédente.

7. Il s'agit de réinjecter le DL trouvé précédent dans l'équation sur x_n, et d'utiliser un $DL_2(0)$ de $(1+x)^\alpha$.

Indications Exercice 2.

I. 1) a) Pour montrer que J_n est à valeurs réelles : Montrer que $\overline{F_n(\theta)} = F_n(\theta)$.

2) b) ii) Dériver la fonction $g\colon a \mapsto \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3) a) On montre que le terme de gauche est égal à l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t) J_n(\theta + t)\,\mathrm{d}t$, et à la même quantité avec $\theta - t$ (J_n est paire).

II. 2) a) Majorer, en utilisant $\sin^4 \leqslant 1$.

b) La fonction $g\colon t \mapsto \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{t^3}$ est prolongeable par continuité en 0.

III. 1) Remplacer $f(\cos\theta)$ par $\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta) J_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2) a) Uniforme continuité.