DM n°15

Exercice 1. Taylor-Lagrange.

I. 1) Soit $a < b$ et $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On suppose que $\varphi(a) = \varphi'(a) = \cdots = \varphi^{(n)}(a) = \varphi(b) = 0$. En utilisant successivement le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$.

2) Soit $g\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$.
Soit $x \in I$, avec $x > a$.

a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $\varphi\colon t \mapsto g(t) - \lambda\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ s'annule en x. On choisit cette valeur pour λ. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, que vaut $\varphi^{(k)}(a)$?

b) Montrer qu'il existe $c \in]a,x[$ tel que $g(x) = g^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Dans la suite, on pourra utiliser que si une fonction g vérifie les hypothèses de la question précédente, alors pour tout $x \in I$, il existe c entre a et x (ce que l'on notera $c \in [a,x]$, même si $x < a$) tel que $g(x) = g^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

II. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$. On considère le polynôme de degré $\leqslant n$

$$P = f(a) + (X-a)f'(a) + \frac{(X-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(X-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

1) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $P^{(k)}(a)$. Que dire de $P^{(n+1)}$?

2) Montrer la formule de Taylor-Lagrange : pour tout $x \in I$ il existe $c \in [a,x]$ tel que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

3) En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) - \cdots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{[a,x]}|f^{(n+1)}|.$$

(Par définition, $\sup\limits_{[a,x]}|f^{(n+1)}| = \sup\limits_{t\in[a,x]}|f^{(n+1)}(t)|$.)

III. On note $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_n$ la limite, si elle existe, de la suite $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1) En appliquant la formule de Taylor-Lagrange pour $f = \sin$, montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

2) En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 2. Soit $I =]u,v[$ un intervalle ouvert, $f\colon I \to I$ une application dérivable et a un point fixe de f. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = |u_n - a|$.

I. On suppose que $u_n \to a$ et que $r_n \neq 0$. Quelle est la limite de $\frac{r_{n+1}}{r_n}$?

II. On suppose $|f'(a)| < 1$. Le point fixe a est dit attractif. On considère un réel k tel que $|f'(a)| < k < 1$.

1) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - a| < \delta$, on ait $|f(x) - a| \leqslant k|x - a|$.

2) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $r_0 < \delta$, on ait $r_n \leqslant k^n r_0$ pour tout n. Qu'en déduit-on sur la suite (u_n) ?

3) ★ On note $J(a)$ l'ensemble des valeurs de $u_0 \in I$ pour lesquelles $u_n \to a$, appelé bassin d'attraction de a. Montrer que $J(a)$ est ouvert, c'est-à-dire que pour tout $x_0 \in J(a)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset J(a)$.

III. On suppose $|f'(a)| > 1$. Le point fixe a est dit répulsif.

1) Montrer que si $u_n \to a$, la suite (u_n) est stationnaire en a.

2) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le voisinage $V = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ de a vérifie que si $u_0 \in V\backslash\{a\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \notin V$.

Exercice 3. ★

On considère $p\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et l'équation différentielle $(E_p)\colon y'' + py = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

I. Unicité à un problème de Cauchy, et caractère isolé des zéros.

1) Soit y une solution de (E_p) telle que $y(0) = y'(0) = 0$. L'objectif est de montrer que y est la fonction nulle.

a) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0, \alpha]$, $|y(x)| \leqslant 1$.

b) Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall x \in [0, \alpha]$, $|y(x)| \leqslant M\frac{x^2}{2}$, puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \alpha]$, $|y(x)| \leqslant M^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

c) En considérant l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid y(x) \neq 0\}$, montrer que y est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

De même, on peut montrer et on admet dans la suite que pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, toute solution de (E) vérifiant $y(a) = y'(a) = 0$ est nécessairement nulle.

2) On considère une fonction y solution de (E_p).

a) On suppose qu'il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ strictement monotone convergente vers ℓ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y(x_n) = 0$. Montrer que y est la fonction nulle.

b) En déduire que si y n'est pas la solution nulle et α est un zéro de y, alors il existe un voisinage V de α tel que y ne s'annule pas sur $V\backslash\{a\}$.

II. Entrelacement de zéros.

Soient $p_1 \geqslant p_2$ deux fonctions continues et y_1, y_2 des solutions non nulles des équations $y'' + p_1(x)y = 0$ et $y'' + p_2(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

On considère $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y_2, et l'on suppose, quitte à remplacer y_2 par $-y_2$, que $\forall x \in]x_1,x_2[$, $y_2(x) > 0$.

1) Montrer que $y_2'(x_1)y_2'(x_2) < 0$.

2) On considère le Wronskien $W\colon x \mapsto y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ et $x_1 < x_2$ deux zéros consécutifs de y_2. En simplifiant $W'(x)$, montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

3) On suppose que $p_1 = p_2$, et que $y_1(x_i) \neq 0$. Justifier que y_1 admet exactement un zéro dans $[x_1, x_2]$.

III. Application

On reprend l'équation $(E)\colon y'' + py = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. On considère y une solution non nulle de (E).

1) Montrer que si p est minorée par une constante strictement positive ω^2, alors y_1 admet une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$, séparés d'au plus $\frac{\pi}{\omega}$.

2) On considère à présent le cas où $p = \exp$ c'est-à-dire $(E)\colon y'' + e^x y = 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante qui tend vers $+\infty$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \big(y(x) = 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ x = a_n\big).$$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\pi}{e^{a_{n+1}/2}} \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$.

c) On pose $b_n = \frac{\pi}{e^{a_n/2}}$. Montrer que $b_{n+1} \sim b_n$, puis en considérant $\frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n}$, trouver un équivalent de a_n.

Indications Exercice 1.

I. **1)** La fonction φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c_1 \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c_1) = 0$.

2) **a)** Poser l'équation $\varphi(x) = 0$, et trouver le λ qui marche.

II. **1)** Noter que a est fixé. Les termes $f^{(k)}(a)$ sont donc des constantes. Calculer les premières dérivées de P et appliquer le résultat en a. Un seul terme reste.

2) Appliquer le résultat de la première partie à une fonction g judicieuse.

Indications Exercice 2.

I. On trouve $|f'(a)|$.

II. **1)** Utiliser la définition de $f'(a)$ comme une limite, et la définition de cette limite.

3) Si $x_0 \in J(a)$, il existe n_0 tel que $f^{(n_0)}(x_0) \in]a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}[$ (Pourquoi ?). Utiliser alors la continuité de $f^{(n_0)}$ pour justifier que pour x assez proche de x_0, $f^{(n_0)}(x)$ est proche de a à δ près, et utiliser ce qui a été fait précédemment.

Indications Exercice 3.

I. **1)** **b)** Utiliser l'équation différentielle.