# DM n°16

Facultatif : le verso, sauf Ex 3 1)a-c)

**Exercice 1.** Dans tout le problème, $n$ et $p$ désignent des entiers naturels non nuls.

**I.** Quel est le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ ?

On note $S_{n,p}$ le nombre d'applications surjectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

**II.** Premiers cas.

**1)** Que vaut $S_{n,n}$ ? **2)** Que vaut $S_{n,p}$ si $p > n$ ? **3)** Que vaut $S_{n,1}$ ?

**III.** Le cas $p = 2$.

**1)** Que vaut $S_{3,2}$ ? $S_{4,2}$ ? Pour $S_{3,2}$ on fera la liste des fonctions, en les dessinant (avec des patates). Pour $S_{4,2}$ on justifiera brièvement.

**2)** On veut calculer $S_{n,2}$.

**a)** Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Quel est le nombre de surjections $f$ de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$ telles que 1 ait exactement $k$ antécédents par $f$ ?

**b)** En déduire $S_{n,2}$.

**IV.** On va donner une relation de récurrence vérifiée par les nombres $S_{n,p}$.

**1)** Exprimer le nombre d'applications $f\colon [\![1,n+1]\!] \to [\![1,p+1]\!]$ surjectives dont la restriction $f_{|[\![1,n]\!]}\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,p+1]\!]$ soit encore surjective en fonction de $S_{n,p+1}$.

**2)** Exprimer le nombre d'applications $f\colon [\![1,n+1]\!] \to [\![1,p+1]\!]$ surjectives dont la restriction $f_{|[\![1,n]\!]}\colon [\![1,n]\!] \to [\![1,p+1]\!]$ ne soit pas surjective en fonction de $S_{n,p}$.

**3)** En déduire que $S_{n+1,p+1} = (p+1)(S_{n,p+1} + S_{n,p})$.

**V.** On va déterminer une expression de $S_{n,p}$ comme une somme. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on note $E_i$ l'ensemble des applications (pas des surjections) de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ dont l'image ne contient pas $i$.

**1)** Quel est le cardinal de $E_i$ ?

**2)** Si $i \neq j$, quel est le cardinal de $E_i \cap E_j$ ?

**3)** Si $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, quel est le cardinal de $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}$ ?

**4)** ★ À l'aide de la formule du crible, montrer que

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

**Exercice 2.**

**I.** Répartitions linéaires.

**1)** On considère une rangée de $2n$ places. On dispose de $2n$ boules, que l'on veut répartir aux $2n$ places.

**a)** On suppose que $n$ des boules sont blanches (indistinguées), et $n$ sont noires.

**i)** Quel est le nombre de répartitions ?

**ii)** Quel est le nombre de répartitions où toutes les boules blanches sont consécutives ?

**b)** On suppose que les boules sont numérotées (donc distinguées), de 1 à $2n$.

**i)** Quel est le nombre de répartitions ?

**ii)** Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles les boules de numéros impairs sont rangées par ordre croissant ?

**2)** On veut à présent répartir un nombre fixé $k$ de personnes indistinguables sur une rangée de $n$ places, sans occuper deux places consécutives.

**a)** On note $\mathcal{C}_{k,n}$ l'ensemble des $k$-uplets strictement croissants $(x_1, \ldots, x_k)$ de $[\![1,n]\!]$, et $\mathcal{C}^1_{k,n}$ l'ensemble des $k$-uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ de $[\![1,n]\!]$ qui vérifient $\forall i \in [\![1,k-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i > 1$.

Expliciter une bijection $\varphi$ de $\mathcal{C}_{k,n}$ dans $\mathcal{C}^1_{k,n+k-1}$. Justifier.

**b)** Montrer que le nombre de parties à $k$ éléments de $[\![1,n]\!]$, sans paire d'éléments consécutifs est $\binom{n-(k-1)}{k}$.

**II.** Répartition circulaire de personnes indistinguables.

On cherche le nombre $r_{k,n}$ de façons de répartir $k$ personnes indistinguables sur une table circulaire à $n$ places, sans occuper deux places côte à côte. On suppose que les places sont numérotées de 1 à $n$.

**1)** Quel est le nombre de telles répartitions, où la place numéro une est occupée ?

**2)** En comptant de deux façons le nombre de couples $(\mathcal{R}, x)$, où $\mathcal{R}$ est une telle répartition, et $x$ est une des places occupées par la répartition, en déduire que $r_{k,n} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$.

**III.** Premier problème de ménages.

Sur une table circulaire de $2n$ places, on veut répartir $n$ couples de personnes (toutes distinguées : on peut imaginer qu'elles sont numérotées de 1 à $2n$, et que, pour $i \in [\![1,n]\!]$, la personne $2i-1$ est en couple avec la personne $2i$).

**1)** Quel est le nombre de répartitions possibles des $2n$ personnes ?

**2)** On fixe un couple $A, B$. Quel est le nombre de répartitions, où l'on impose que $A$ soit à côté de $B$ ?

On veut à présent répartir les $2n$ personnes de sorte que les conjoints ne soient jamais côte à côte.

**3)** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que le nombre de façons de choisir $k$ paires de places consécutives, toutes les paires étant disjointes, est de $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$.

**4)** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On choisit $k$ couples parmi les $n$. Quel est le nombre de répartitions où les conjoints de chacun des $k$ couples choisis sont côte à côte ?

**5)** Avec le principe d'exclusion-exclusion, en déduire que le nombre de répartitions est

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2n(2n-k-1)!2^k.$$

**IV.** Deuxième problème de ménages.

On veut à nouveau répartir $n$ couples homme/femme sur une table circulaire. On impose cette fois-ci qu'il y ait une alternance H/F autour de la table, et qu'à nouveau, les conjoints ne soient pas côte à côte.

**1)** On suppose que les places sont numérotées de 1 à $2n$ et que les femmes vont être assises à des places impaires.

**a)** Combien y a-t-il de façon de placer les femmes ?

**b)** ★ Une fois que la répartition des femmes est fixée, montrer que le nombre de façons de placer les hommes est

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!.$$

**2)** Quel est le nombre de placements $m'_n$ de répartitions possibles ?

**Exercice 3.** ★ Discrépance

Si $E$ et $F$ sont finis, la discrépance de $F$ par rapport à $E$ est l'entier $\Delta(E, F) = \big||F \cap E| - |E \backslash F|\big|$, où $E \backslash F = E \cap \overline{F}$.

**1)** Soit $X$ de cardinal $d$ et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de $X$.

**a)** Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$ ?

**b)** Calculer en fonction de $d$ les sommes $\sum\limits_{k=0}^{d} k\binom{d}{k}$ et $\sum\limits_{k=0}^{d} k(k-1)\binom{d}{k}$.

**c)** Calculer les sommes $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum\limits_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y|$ et $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum\limits_{Y \in \mathcal{P}(X)} |Y|^2$.

**d)** Montrer que $\frac{1}{|\mathcal{P}(X)|} \sum\limits_{Y \in \mathcal{P}(X)} \Delta(X, Y)^2 = d$.

**2)** Si $N$ et $q$ sont deux entiers $> 0$, et $a \in \mathbb{Z}$, on note $S_{q,a}(N)$ l'ensemble des éléments de $[\![1, N]\!]$ congrus à $a$ modulo $q$. On note $\mathcal{P}(N) = \mathcal{P}([\![1, N]\!])$.

**a)** Montrer que pour tous entiers $1 \leqslant a \leqslant q \leqslant N$, $|S_{q,a}(N)| < 1 + \frac{N}{q}$.

**b)** Montrer que pour tous entiers $1 \leqslant t \leqslant N$,

$$\frac{1}{|\mathcal{P}(N)|} \sum_{Y \in \mathcal{P}(N)} \sum_{q=1}^{t} \sum_{a=1}^{q} \Delta(S_{q,a}(N), Y)^2 \leqslant 2Nt.$$

**c)** En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un sous-ensemble $Y$ de $[\![1, N]\!]$ tel que pour tout $q \in [\![1, N]\!]$ et tout $a \in [\![1, q]\!]$, $\Delta(S_{q,a}(N), Y) \leqslant CN^{2/3}$.

On pourra choisir une valeur de $t$ judicieuse dans l'inégalité précédente.

**Exercice 4.** ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f$ est convexe si et seulement si $\forall x, \forall h > 0$, $2hf(x) \leqslant \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$.

**Indications Exercice 1.**

**III.** **1)** On trouve 6 et 14.

**IV.** **2)** Si cette restriction n'est pas surjective, c'est que $n+1$ était l'unique antécédent de $p+1$ par $f$. La restriction $f_{|[\![1,n]\!]}$ est alors une surjection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p+1]\!]$.

**Indications Exercice 2.**

**I.** **2)** **a)** Considérer $\varphi : (x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, \ldots, x_k + k - 1)$.

**II.** **1)** Utiliser la partie précédente.

**III.** **3)** Utiliser la partie précédente. On trouve $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$.

**4)** On trouve $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k} k! 2^k (2n-2k)!$.

**Indications Exercice 4.** Les deux hypothèses sont invariantes par ajout/retrait d'une fonction affine. Si $f$ n'est pas convexe, elle est, en un point, en dessous d'une corde. On peut supposer que cette corde est horizontale.