DM n°17

Facultatif : Ex 4/5

Exercice 1. On considère deux urnes U_1, U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans U_1.

À chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit une des n boules de manière équiprobable, et on la change d'urne.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k le nombre de boules dans l'urne U_1 après la k-ième étape.

Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$, on note $E_{k,\ell} = (N_k = \ell)$ et $p_{k,\ell} = P(E_{k,\ell})$.

On note $Z_k = (p_{k,0}, p_{k,1}, \ldots, p_{k,n}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n})$?
2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, \ell \in [\![0, n]\!]$, que vaut $P(E_{k+1,j} \mid E_{k,\ell})$?
   On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(E_{k+1,0}) = \dfrac{1}{n} P(E_{k,1})$ et $P(E_{k+1}, n) = \dfrac{1}{n} P(E_{k,n-1})$. et que
$$\forall j \in [\![1, n-1]\!], \quad P(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} P(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} P(E_{k,j+1}).$$
4. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$, où $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On suppose qu'initialement, les n boules ont été disposées de façon équiprobable dans les deux urnes U_1 et U_2.
5. Déterminer la loi π de N_0.
6. Soit $\vec{p} = (p_0, \ldots, p_n) = \left(\binom{n}{k}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Vérifier que $\vec{p} \in \operatorname{Ker}(A_n - nI_{n+1})$, puis que $\operatorname{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \operatorname{Vect} \vec{p}$.
7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k a la même loi que N_0.
8. Montrer que π est l'unique loi de probabilité à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π, alors toutes les variables N_k suivent la loi π.

Exercice 2. On considère un détecteur de particules ayant une probabilité de détection de chaque particule égale à $p \in]0,1[$. On note N et S les variables aléatoires qui comptent respectivement le nombre de particules arrivant sur le capteur et le nombre de particules détectées. On suppose que N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$, où $n \geqslant 1$ et $q > 0$.

1. Soient $s, k \in \mathbb{N}^*$, avec $s \leqslant k \leqslant n$. Déterminer $P(S = s \mid N = k)$, puis $P(S = s \text{ et } N = k)$.
2. Déterminer $S(\Omega)$, et pour $s \in S(\Omega)$, donner une expression de $P(S = s)$ comme une somme.
3. Montrer que S suit une loi $\mathcal{B}(n, pq)$,
   (a) en calculant la somme précédente, à l'aide d'une formule de la forme $\binom{k}{s}\binom{n}{k} = \binom{n}{s}\binom{\cdots}{\cdots}$.
   (b) en reconnaissant directement un schéma binomial.
4. Décrire, sans calcul, la loi de $N - S$.
5. Les variables S et N sont-elles indépendantes ? Justifier proprement.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 2$ et $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on note $R_p = \sum_{i=1}^{p} Z_i$. On admet que la loi de R_p est entièrement déterminée par les lois des Z_i, au sens où si $Z'_1, \ldots, Z'_n$ sont d'autres variables aléatoires indépendantes, où Z'_i a la même loi que Z'_i, alors $R'_p = \sum_{i=1}^{p} Z'_i$ a la même loi que R_p.

On veut montrer que
$$\forall x > 0, \quad P\left(\max_{1 \leqslant p \leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\right) \leqslant 3 \max_{1 \leqslant p \leqslant n} P\big(|R_p| \geqslant x\big).$$

On note A l'événement $\big(\max_{1 \leqslant p \leqslant n} |R_p| \geqslant 3x\big)$. Ainsi,
$$A = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \max_{1 \leqslant p \leqslant n} |R_p(\omega)| \geqslant 3x\right\}.$$

Pour $n \geqslant 2$, on considère les événements
$$A_1 = \big(|R_1| \geqslant 3x\big) \quad \text{et} \quad \forall p \in [\![2, n]\!], \quad A_p = \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant p-1} |R_i| < 3x\right) \cap \big(|R_p| \geqslant 3x\big).$$

1. Exprimer l'événement A à l'aide des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
2. Montrer que l'on a
$$P(A) \leqslant P\left(|R_n| \geqslant x\right) + \sum_{p=1}^{n} P\big(A_p \cap (|R_n| < x)\big).$$

3. Justifier que pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, on a l'inclusion
$$A_p \cap \big(|R_n| < x\big) \subset A_p \cap \big(|R_n - R_p| > 2x\big).$$
4. En déduire que
$$P(A) \leqslant P\big(|R_n| \geqslant x\big) + \max_{1 \leqslant p \leqslant n} P\big(|R_n - R_p| > 2x\big).$$
5. Conclure.

Exercice 4. Dérangements. On appelle dérangement de $[\![1,n]\!]$ toute permutation σ de $[\![1,n]\!]$ n'admettant aucun point fixe. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$ et on convient que $D_0 = 1$.

1. Montrer, pour $n \geqslant 0$, que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$.
2. ★ Montrer que $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

Exercice 5. ♣ ★ Percolation. On considère un graphe $\tilde{G}$ dont les sommets sont $\mathbb{Z}^2$ et les arêtes relient chaque paire de points à distance 1. Soit $p \in [0,1]$. On construit un graphe aléatoire $G \subset \tilde{G}$ en gardant chaque arête indépendamment avec probabilité p.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}_n$ l'évènement «il existe un chemin auto-évitant de longueur n issu de $(0,0)$ dans G'» (un chemin auto-évitant étant un chemin qui ne repassent jamais deux fois par le même sommet) et $\mathcal{C}$ l'évènement «il existe un chemin infini issu de $(0,0)$ dont la distance à l'origine tend vers $+\infty$». On note $\theta(p)$ la probabilité de $\mathcal{C}$.

1. ★ Montrer que $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, l'intersection étant décroissante. On convient alors que $\theta(p) = \lim_{n \to +\infty} P(\mathcal{C}_n)$.
2. (a) Soit A_n l'ensemble des chemins auto-évitants de longueur n partant de $(0,0)$. Montrer que $|A_n| \leqslant 4 \times 3^{n-1}$.
   (b) En déduire que $\theta(p) = 0$ si $p < \frac{1}{3}$.
3. On note G^* le graphe dual de G, dont les sommets sont les points à coordonnées $(n + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ et deux sommets à une distance 1 sont reliés par une arête si et seulement si celle-ci ne croise pas une arête de G.
   (a) Soit C_n l'ensemble des cycles à sommets distincts de G^* de longueur n entourant $(0,0)$. Montrer que $|C_n| \leqslant 3^{n-1} 4n$.
   (b) Montrer que $\theta(p) > 0$ pour p proche de 1. On admettra que pour $x \in [0,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Indications Exercice 1.

6. Il s'agit de résoudre un système. La matrice A est de taille $n+1$.
7. Le fait que $\vec{p} \in \operatorname{Ker}(A_n - nI_{n+1})$ s'écrit $A_n \vec{p} = n\vec{p}$.
8. Il s'agit de faire le lien avec la question sur le noyau de $A_n - nI_{n+1}$.

Indications Exercice 3. Pour justifier des inclusions/égalités sur des évènements définis par des variables aléatoires, on peut écrire : Soit $\omega \in A$, c'est que $\max_{1 \leqslant p \leqslant n} \big|R_p(\omega)\big| \geqslant 3x$, donc il existe $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $\big|R_p(\omega)\big| \geqslant 3x$, etc.

2. L'inégalité vient d'une inclusion. À quoi correspond $\sum_{p=1}^{n} P\left(A_p \cap \big(|R_n| < x\big)\right)$?

Indications Exercice 4.

1. Partitionner les permutations selon leur nombre de points fixes.
2. Partitionner les dérangements σ de $[\![1,n+1]\!]$ selon le couple $(\sigma(n+1), \sigma^{-1}(n+1))$.

Indications Exercice 5.

1. Une inclusion est claire. Pour l'autre : si on a une suite de chemin issus de l'origine, arbitrairement grands, on peut en extraire une telle suite dont les premiers pas sont tous les mêmes, puis dont les second pas sont tous les mêmes...
3. (b) Pour p assez proche de 1, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n}{3} \left(3(1-p)\right)^n$ a une valeur < 1.