DM n°18

Les questions Ex 3 IV)2) et Ex 5 III) utilisent le cours sur les projections, que l'on fera lundi. Verso facultatif.

Exercice 1. Soient f, g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.
4. Donner un exemple de tels endomorphismes qui ne soient pas bijectifs.

Exercice 2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $h_1 = (1, -1, 1, -1), h_2 = (1, 0, 1, 0)$ et les ensembles

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0\right\},\ G = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + 3z + 4t = 0\right\} \text{ et } H = \mathrm{Vect}(h_1, h_2).$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer une famille génératrice de $F \cap G$.
3. Déterminer une famille génératrice de $F \cap H$.

Exercice 3. Espaces supplémentaires.

I. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère un polynôme P de degré p et $E_P = \{PQ,\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$ l'ensemble des multiples de P.

1) Montrer que E_P est un espace vectoriel.

2) Montrer que $E_P \oplus \mathbb{R}_{p-1}[X] = \mathbb{R}[X]$.

II. Dans $E = \mathbb{R}[X]$ on note $\mathcal{P} \subset E$ l'ensemble des polynômes pairs, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des polynômes impairs.

1) Donner sans justifier une base de $\mathcal{P}$.

2) Montrer que $\mathcal{I} \oplus \mathcal{P} = E$.

III. Soit $\varphi\colon P \mapsto \frac{P(X)+P(-X)}{2} + X\frac{P(X)-P(-X)}{2}$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}\, \varphi = \mathcal{P}$.

2) Montrer que $\mathrm{Ker}\, \varphi = \left\{(1 - X)P(X),\ P \in \mathcal{I}\right\}$.

3) Montrer que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

On dit que φ est une projection, et on peut en déduire que $\mathrm{Im}\, \varphi$ et $\mathrm{Ker}\, \varphi$ sont supplémentaires.

IV. Supplémentaires communs

1) Soient F_1, F_2 supplémentaires dans E, tels qu'il existe un isomorphisme $u\colon F_1 \to F_2$. Montrer que $G = \{x - u(x),\ x \in F_1\}$ est un espace vectoriel et que c'est un supplémentaire commun à F_1 et F_2.

2) Montrer que si F_1, F_2 admettent un supplémentaire commun H, et si p est la projection sur F_1 parallèlement à H, alors $p_{|F_2}$ réalise un isomorphisme de F_2 sur F_1.

Exercice 4. Liberté de familles de vecteurs propres.

I. Familles libres. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre, et $e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Justifier qu'à multiplication par un scalaire près, il existe une unique relation de liaison non triviale sur la famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$, c'est-à-dire si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$ sont les coefficients de deux relations de liaison, non triviales, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i,\ \lambda_i = k\mu_i$.

II. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ des vecteurs non nuls de E. On suppose qu'il existe une application $u \in \mathcal{L}(E)$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ <u>distincts</u> tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = \lambda_i e_i$.

1) On suppose que $n = 2$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Montrer que (e_1, e_2) est libre.

2) Montrer que la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre. On raisonnera par l'absurde, et on considérera le plus petit entier p tel que $(e_1, \ldots, e_p)$ soit liée.

III. Application

1) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que la famille $(f_\alpha\colon x \mapsto e^{\alpha_i x})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

2) ★ Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que la famille $\left((\lambda_i^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-ev. Pour $k \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux endomorphismes de E vérifiant $(E_k)\colon u^2 = ku$.

I. Préliminaires.

1) Déterminer, en fonction de k, les automorphismes de E vérifiant (E_k).

2) Si u vérifie (E_k) et $x \in \mathrm{Im}\, u$, donner une expression simple de $u(x)$.

II. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\mathrm{Im}\, u$ est une droite vectorielle. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que u vérifie (E_k).

III. Image et Noyau. Soit u vérifiant (E_k).

1) Si $k \neq 0$, montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont supplémentaires.

2) Que dire de $\mathrm{Ker}\, u, \mathrm{Im}\, u$ si $k = 0$?

IV. Paires de solutions.

On suppose $k \neq 0$. Soient u, v vérifiant (E_k)

1) Montrer que si $uv + vu = \vec{0}_{\mathcal{L}(E)}$ alors $uv = vu = \vec{0}_{\mathcal{L}(E)}$.

2) Donner une CNS pour que $u + v$ vérifie (E_k).

Dans ce cas, montrer que $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.

3) Montrer que si u et v commutent alors uv vérifie $(E_{k'})$, pour un $k' \in \mathbb{R}$. Expliciter alors $\mathrm{Im}(uv)$ et $\mathrm{Ker}(uv)$.

Exercice 6. ★ Soit $\mathbb{K}$ un corps fini à q éléments.

1. Quel est le nombre de droites vectorielles dans $\mathbb{K}^n$?

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que le nombre de familles libres $(e_1, \ldots, e_k)$ dans $\mathbb{K}^n$ est

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \ldots (q^n - q^{k-1}).$$

3. En déduire le cardinal de $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7. ★ **Lemme local de Lovász**. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des évènements vérifiant $P(A_i) \leqslant p < 1$ et tels que pour chaque i, il existe un ensemble d'indices I_i de cardinal $\geqslant n - d$ tel que A_i soit indépendant de la tribu engendrée par les A_j pour $j \in I_i$, c'est-à-dire indépendant de tout évènement construit à partir de ces A_j. On fait l'hypothèse que $epd \leqslant 1$.

1. En utilisant $P(A \mid B \cap C) = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)}$, montrer que pour tout sous-ensemble $S \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ et $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$P(A_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{A_j}) \leqslant \frac{1}{d}.$$

2. En déduire que $P(\bigcap \overline{A_i}) > 0$.

3. On considère $11n$ points arrangés sur un cercle. Montrer que pour tout coloriage de ces points avec n couleurs où chaque couleur est utilisée 11 fois, on peut trouver n points, un de chaque couleur, tels qu'aucun deux de ces points ne soient adjacents.

Exercice 8. ★ Soit $\varphi \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\varphi(u) \in \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi \colon u \mapsto u_n$.

Indications Exercice 1.

3. Pour montrer que $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, g = E$, procéder par condition nécessaire : si on pouvait écrire $x = a + b$, avec $a \in \mathrm{Ker}\, f$ et $b \in \mathrm{Im}\, f$, trouver ce que doit valoir b.

Indications Exercice 2.

3. Considérer $u \in H$, et étudier à quelle condition il appartient à F.

Indications Exercice 3.

II. Un polynôme P est pair si et seulement si $P(X) = P(-X)$, ou si et seulement si $\forall k$, $c_{2k+1}(P) = 0$.

2) Pour la somme : par condition nécessaire, si P est la somme $P = Q + I$, avec Q pair, considérer $P(-X) = \ldots$.

III. **2)** Pour l'inclusion difficile, on pourra noter $P_1 = \frac{P(X)+P(-X)}{2}$ et $P_2 = \frac{P(X)-P(-X)}{2}$ les parties paire et impaire d'un élément $P \in \mathrm{Ker}\, \varphi$.

Indications Exercice 5.

I. **1)** Si u est bijective, on peut utiliser u^{-1}.

2) On trouve $u(x) = kx$.

III. **1)** Pour montrer que la somme fait E, si $z \in E$, déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z - \lambda u(z) \in \mathrm{Ker}\, u$.

2) On a une inclusion.

IV. **1)** Manipuler l'égalité donnée pour faire apparaître uvu, et montrer que $uv = vu$.

2) La CNS est $uv = vu = \vec{0}_{\mathcal{L}(E)}$. Ce qui se traduit en termes des images et des noyaux.

Montrer les deux égalités par double inclusion. Dans chaque cas, une des inclusions est plus simple, est vraie sans hypothèse sur u, v. On peut utiliser le schéma suivant : $F + G \subset H \Leftrightarrow F \subset H$ et $G \subset H$. Pour une des inclusions plus difficile, on pourra utiliser $\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u = E$.

3) On trouve $\mathrm{Im}(uv) = \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{Ker}(uv) = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v$.

Indications Exercice 6.

3. Une matrice est inversible ssi ses colonnes forment une famille libre.

Indications Exercice 7.

1. Procéder par récurrence sur le cardinal de S.

Indications Exercice 8. Considérer l'image par φ d'une famille de suites élémentaires.