DM n°19

Exercice 1. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$ et $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$.

I. Préliminaires.

1) Restriction et endomorphisme induit.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $u_{|F}$ la restriction de u à F, définie par

$$u_{|F}: \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}.$$

a) Donner des CNS sur $\mathrm{Ker}\, u$ et F pour que $u_{|F}$ soit injectif, et $u_{|F}$ soit l'application nulle.

b) On suppose que F est stable par u et de dimension finie. Donner une CNS simple pour que l'induit $u_F : F \to F$ soit un automorphisme.

2) a) Soient $v, w \in \mathcal{L}(E)$. Comparer pour l'inclusion d'une part $\mathrm{Ker}(v \circ w)$ et $\mathrm{Ker}\, w$, et d'autre part $\mathrm{Im}(v \circ w)$ et $\mathrm{Im}\, v$.

b) En déduire que la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de E pour l'inclusion, c'est-à-dire que pour tout $k \geqslant 0$, $I_{k+1} \subset I_k$. Montrer que $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E.

c) Montrer que $u(I_k) = I_{k+1}$.

d) On considère $E = \mathbb{K}[X]$, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. Donner un exemple d'un endomorphisme surjectif $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que la suite (N_k) soit une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E.

II. Noyaux et images itérés.

On suppose désormais que E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $m_k = \dim I_k$. Montrer que la suite (m_k) est décroissante. En déduire qu'il existe $0 \leqslant p \leqslant n$ tel que $I_p = I_{p+1}$.

2) Soient $v, w \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}\, w - \mathrm{rg}\, v \circ w = \dim(\mathrm{Ker}\, v \cap \mathrm{Im}\, w)$.

3) En déduire une expression de $\dim I_n - \dim I_{n+1}$ en fonction de $\mathrm{Ker}\, u$ et I_n, puis que la suite $(\dim I_n - \dim I_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4) Étude du rang à partir duquel les suites sont constantes.

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $I_p = I_{p+1}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, I_{p+k} = I_p$.

b) Montrer que $I_p = I_{p+1}$ si et seulement si $N_p = N_{p+1}$, et justifier que dans ce cas, on a $\forall k \in \mathbb{N}, N_{p+k} = N_p$.

c) Montrer que $I_p = I_{p+1}$ si et seulement si $I_p \oplus N_p = E$.

5) Démontrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Matrices magiques et bistochastiques. Théorème de Birkhoff.

I. Structure de l'ensemble des matrices magiques.

Une matrice carrée $M = (m_{ij})_{i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite magique s'il existe $\sigma(M) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{k=1}^n m_{ik} = \sum_{k=1}^n m_{ki} = \sigma(M)$. Autrement dit, si les sommes des coefficients sur chaque ligne et chaque colonne sont égales.

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et H l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont la somme des coordonnées vaut 0.

1) Montrer que $\mathrm{Vect}\, X_0$ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique si et seulement si $\mathrm{Vect}\, X_0$ et H sont stables par M, c'est-à-dire stables par l'application linéaire associée à M.

Dans les questions suivantes, il est judicieux d'utiliser cette caractérisation.

3) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\sigma : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ est linéaire.

4) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que $\sigma : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \quad M \mapsto \sigma(M)$ est un morphisme d'anneau.

5) Soit $M \in \mathcal{M}$ inversible et $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée. Montrer que l'induit m_H est un isomorphisme. En déduire que $M^{-1} \in \mathcal{M}$ et calculer $\sigma(M^{-1})$.

II. Matrices de permutation et centre de $\mathcal{M}$.

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

On note $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique, c'est-à-dire l'ensemble des applications bijectives $\sigma : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$.

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation, on note $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation définie comme $P_\sigma = \sum_{i=1}^n E_{\sigma(i),i}$, où (E_{ij}) est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P_\sigma E_i = E_{\sigma(i)}$, où $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) Pour $i \neq j$, on considère la transposition $\sigma_{ij} \in \mathcal{S}_n$ définie par

$$\sigma_{ij}(i) = j, \quad \sigma_{ij}(j) = i, \quad \text{ et } \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad (k \neq i \text{ et } k \neq j) \Rightarrow \sigma_{ij}(k) = k.$$

Expliciter la matrice $P_{\sigma_{ij}}$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, décrire $P_{\sigma_{ij}} A$.

2) Vérifier que J et P_σ sont magiques.

3) On considère le centre de $\mathcal{M}$, défini comme $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \{M \in \mathcal{M} \mid \forall A \in \mathcal{M},\ AM = MA\}$. Montrer que $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

III. Dimension de $\mathcal{M}$.

On considère les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f_i(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \text{ et } g_i(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}.$$

1) Déterminer un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,\sigma$ dans $\mathcal{M}$.

2) Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est liée.

3) Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_{n-1})$ est libre.

4) ★ En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

IV. Matrices bistochastiques.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique si $M \in \mathcal{M}$, $\sigma(M) = 1$ et tous les coefficients de M sont positifs.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des matrices bistochastiques.

1) Justifier que les matrices de permutation sont bistochastiques. Les matrices bistochastiques sont-elles toujours inversibles ?

2) Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par produit.

3) ★ Montrer que $\mathrm{Vect}\,\mathcal{B} = \mathcal{M}$.

V. Convexité et points extrémaux.

On dit qu'une partie $A \in E$ est convexe si $\forall x \in A$, $\forall y \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$.

1) Parmi $\mathcal{M}, \mathcal{B}, GL_n(\mathbb{R})$ lesquels sont convexes ? Justifier brièvement.

On dit qu'un point $a \in A$ est extrémal si $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in]0,1[, \quad \lambda x + (1 - \lambda) y = a \Rightarrow x = y = a$.

2) Montrer que les matrices de permutations sont extrémales dans $\mathcal{B}$.

VI. ★ Théorème de Birkhoff

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $I, J \subset [\![1, n]\!]$, on note $A_{I,J} \in \mathcal{M}_{|I|,|J|}$ la matrice obtenue en ne gardant que les coefficients d'indices $(i, j) \in I \times J$.

Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle slalom de A associé à σ le produit $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$.

1) Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, décrire les matrices $P_\sigma A$ et AP_σ.

On admet que si tous les slaloms de A sont nuls, alors il existe $I, J \subset [\![1, n]\!]$ avec $|I| + |J| = n + 1$ tels que $A_{I,J} = O$.

2) En déduire que si tous les slaloms de A sont nuls, il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $r + s = n + 1$ et deux matrices de permutations P_σ et $P_{\sigma'}$ telles que la matrice $B = P_\sigma A P_{\sigma'}$ vérifie $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\forall j \in [\![r, n]\!]$, $b_{ij} = 0$.

3) En déduire que si A est bistochastique, elle admet un slalom non nul.

4) Soit A bistochastique, et σ associée à un slalom non nul de A. On considère $\alpha = \min\limits_{j} a_{\sigma(j),j}$

  a) Que dire de A si $\alpha = 1$?

  b) Si $\alpha < 1$, montrer que $A - \alpha M_\sigma = (1 - \alpha) B$, où B est une matrice bistochastique qui admet strictement plus de coefficients nuls que A.

5) En déduire que les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont exactement les matrices de permutations.

Indications Exercice 1.

I. 1) a) Quel est le noyau de $u_{|F}$?

2) b) Se donner k écrire la définition de I_{k+1} et I_k puis appliquer la question précédente à deux endomorphismes v, w judicieux.

II. 2) Appliquer le théorème du rang à la restriction $v_{|\,\mathrm{Im}\,w}$ de v à $\mathrm{Im}\,w$.

4) a) Montrer que $I_{p+2} = I_{p+1}$ en utilisant la question précédente à deux reprises.

  c) L'implication $\Leftarrow$ est plus simple. Pour $\Rightarrow$, procéder par l'absurde : supposer que la somme n'est pas directe, on obtient un élément z non nul, qui s'écrit $z = u^p(y)$. Contredire la question précédente.

5) Noter que si une telle matrice existait, on aurait $\mathrm{rang}\, A^2 = 2$. Que peut valoir $\mathrm{rang}\, A$? Que vaut $\mathrm{rang}\, A^4$?

Indications Exercice 2.

II. 3) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que vaut la matrice $P_{\sigma_{ij}} A$?

III. 2) Qu'est-ce que l'application $\sum_{k=1}^{n} f_k$?

4) Quelle est la dimension de $G = \bigcap_i \mathrm{Ker}\, f_i \bigcap_i \mathrm{Ker}\, g_i$? En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

VI. 3) Que dire de la somme des coefficients d'une matrice bistochastique ?