# DM n°20

Ex 3 : Dans le II et le III, il faut chercher à utiliser les parties précédentes ; quelques indications au dos. Le IV est facultatif. L'ex 4 est difficile, facultatif également.

**Exercice 1.** Montrer que $x \mapsto |x|$ est convexe.

**Exercice 2.** Soit $E$ un espace de dimension $2n$, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension $n$. Justifier l'existence d'une application $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} u = F = \operatorname{Ker} u$.

**Indications Exercice 2.** On définit une application linéaire en choisissant l'image d'une base par $u$. Choisir une base judicieuse, à partir de $F$.

**Exercice 3.**

**I.** Répartitions linéaires.

**1)** On considère une rangée de $2n$ places. On dispose de $2n$ boules, que l'on veut répartir aux $2n$ places.

- **a)** On suppose que $n$ des boules sont blanches (indistinguées), et $n$ sont noires.
  - **i)** Quel est le nombre de répartitions ?
  - **ii)** Quel est le nombre de répartitions où toutes les boules blanches sont consécutives ?
- **b)** On suppose que les boules sont numérotées (donc distinguées), de 1 à $2n$.
  - **i)** Quel est le nombre de répartitions ?
  - **ii)** Quel est le nombre de répartitions pour lesquelles les boules de numéros impairs sont rangées par ordre croissant ?

**2)** On veut à présent répartir un nombre fixé $k$ de personnes indistinguables sur une rangée de $n$ places.

- **a)** On note $\mathcal{C}_{k,n}$ l'ensemble des $k$-uplets strictement croissants $(x_1, \ldots, x_k)$ de $[\![1, n]\!]$, et $\mathcal{C}^1_{k,n}$ l'ensemble des $k$-uplets $(x_1, \ldots, x_k)$ de $[\![1, n]\!]$ qui vérifient $\forall i \in [\![1, k-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i > 1$.

  Expliciter une bijection $\varphi$ de $\mathcal{C}_{k,n}$ dans $\mathcal{C}^1_{k,n+k-1}$. Justifier soigneusement la bijectivité.
- **b)** Montrer que le nombre de parties à $k$ éléments de $[\![1, n]\!]$, sans éléments consécutifs est $\binom{n-(k-1)}{k}$.

**II.** Répartition circulaire de personnes indistinguables.

On cherche le nombre $r_{k,n}$ de façons de répartir $k$ personnes indistinguables sur une table circulaire à $n$ places, sans occuper deux places côte à côte. On suppose que les places sont numérotées de 1 à $n$.

**1)** Quel est le nombre de telles répartitions, où la place numéro une est occupée ?

**2)** En comptant de deux façons le nombre de couples $(\mathcal{R}, x)$, où $\mathcal{R}$ est une telle répartition, et $x$ est une des places occupées par la répartition, en déduire que $r_{k,n} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$.

**III.** Premier problème de ménages.

Sur une table circulaire de $2n$ places, on veut répartir $n$ couples de personnes (toutes distinguées : on peut imaginer qu'elles sont numérotées de 1 à $2n$, et que, pour $i \in [\![1, n]\!]$, la personne $2i-1$ est en couple avec la personne $2i$).

**1)** Quel est le nombre de répartitions possibles des $2n$ personnes ?

**2)** On fixe un couple $A, B$. Quel est le nombre de répartitions, où l'on impose que $A$ soit à côté de $B$ ?

On veut à présent répartir les $2n$ personnes de sorte que les conjoints ne soient jamais côte à côte.

**3)** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que le nombre de façons de choisir $k$ paires de places consécutives, toutes les paires étant disjointes, est de $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$.

**4)** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On choisit $k$ couples parmi les $n$. Quel est le nombre de répartitions où les conjoints de chacun des $k$ couples choisis sont côte à côte ?

**5)** Avec le principe d'exclusion-exclusion, en déduire que le nombre de répartitions est

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2n(2n-k-1)!2^k.$$

**IV.** Deuxième problème de ménages.

On veut à nouveau répartir $n$ couples homme/femme sur une table circulaire. On impose cette fois-ci qu'il y ait une alternance H/F autour de la table, et qu'à nouveau, les conjoints ne soient pas côte à côte.

**1)** On suppose que les places sont numérotées de 1 à $2n$ et que les femmes vont être assises à des places impaires.

- **a)** Combien y a-t-il de façon de placer les femmes ?
- **b)** ★ Une fois que la répartition des femmes est fixée, montrer que le nombre de façons de placer les hommes est

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!.$$

**2)** Quel est le nombre de placements $m'_n$ de répartitions possibles ?

**3)** Retrouver cette expression plus simplement en appliquant un raisonnement similaire à III.

**Indications Exercice 3.**

**I. 2) a)** Considérer $\varphi\colon (x_1,\dots,x_k)\mapsto(x_1,x_2+1,x_3+2,\dots,x_k+k-1)$.

**II. 1)** Utiliser la partie précédente.

**III. 3)** Utiliser la partie précédente. On trouve $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$.

**4)** On trouve $\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}k!2^k(2n-2k)!$.

**Exercice 4.** ★ Soit $u\in\mathcal{C}^0([-1,1])$.

On définit le sur-différentiel de $u$ en $x\in\,]-1,1[$ comme l'ensemble des $p\in\mathbb{R}$ pour lesquels il existe une fonction $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $x$ avec $\varphi'(x)=p$ telle que $u-\varphi$ admet un maximum local en $x$. On note cet ensemble $D^+u(x)$.

De même, on définit le sous-différentiel de $u$ en $x$, noté $D^-u(x)$, correspondant à un minimum local.

1. Soit $x_0\in\,]-1,1[$. Montrer que si $u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $x_0$, alors
$$D^+u(x_0)=D^-(x_0)=\{u'(x_0)\}.$$
2. Soit $x_0\in\,]-1,1[$. On suppose que $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$ sont non vides.
   **(a)** Montrer qu'il existe $\varphi_1,\varphi_2$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $x_0$ et $\delta>0$ tels que
   $$u(x_0)=\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$$
   et, pour tout $|x-x_0|<\delta$,
   $$\varphi_1(x)\leqslant u(x)\leqslant\varphi_2(x).$$
   **(b)** En déduire que $u$ est dérivable en $x_0$. Déterminer $D^+u(x_0)$ et $D^-u(x_0)$.
3. **(a)** Soit $x_0\in\,]-1,1[$ et $0<r<\min(|1-x_0|,|1+x_0|)$. En considérant la fonction $\varphi_{x_0,r}\colon x\mapsto\frac{1}{r^2-|x-x_0|^2}$ définie sur $I_{x_0}(r)=\,]x_0-r,x_0+r[$, montrer qu'il existe $y\in I_{x_0}(r)$ tel que $D^+u(y)\neq\varnothing$.
   **(b)** Montrer que $\{y\in\,]-1,1[\ \mid\ D^+u(y)\neq\varnothing\}$ est dense dans $]-1,1[$.
4. Pour $x_0\in\,]-1,1[$ et $\varepsilon>0$, on note $V_\varepsilon^{\neq}(x_0)=[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\cap[-1,1]\backslash\{x_0\}$.
   **(a)** Soit $x_0\in\,]-1,1[$ tel que $D^+u(x_0)\neq\varnothing$, et $p\in D^+u(x_0)$. Montrer que
   $$(*):\quad \lim_{\varepsilon\to0^+}\ \sup_{y\in V_\varepsilon^{\neq}(x_0)}\frac{u(y)-u(x_0)-p(y-x_0)}{|y-x_0|}\leqslant0.$$
   On considère $x_0\in\,]-1,1[$ et $p\in\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$. On veut montrer que $p\in D^+u(x_0)$.
   **(b)** On pose, $\varphi(0)=0$ et, pour $r>0$, $\quad\varphi(r)=\max\left(0,\ \sup_{y\in V_r^{\neq}(x_0)}\frac{u(y)-u(x_0)-p(y-x_0)}{|y-x_0|}\right)$.
   Montrer que pour tout $r>0$, $\varphi(r)$ est bien défini, et que
   $$\forall x\in\,]-1,1[,\quad u(x)\leqslant u(x_0)+p(x-x_0)+\varphi(|x-x_0|)|x-x_0|.$$
   **(c)** Montrer que la fonction $\rho\colon r\mapsto\int_0^r\varphi(s)\,\mathrm{d}s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $\rho(0)=\rho'(0)=0$.
   **(d)** Montrer que $\forall r\geqslant0$, $\rho(2r)\geqslant\varphi(r)r$.
   **(e)** En déduire que $p\in D^+u(x_0)$ et que pour tout $x_0\in\,]-1,1[$,
   $$D^+u(x_0)=\left\{p\in\mathbb{R}\mid \lim_{\varepsilon\to0^+}\ \sup_{y\in V_\varepsilon^{\neq}(x_0)}\frac{u(y)-u(x_0)-p(y-x_0)}{|y-x_0|}\leqslant0\right\}.$$
   *Dans la suite, on pourra utiliser la même caractérisation pour $D^-u(x_0)$, avec $\leqslant$ remplacé par $\geqslant$.*
5. Soit $x_0\in\,]-1,1[$. Montrer que le résultat de la question 1 est toujours valable en supposant uniquement $u$ dérivable en $x_0$.
6. Soit $x_0\in\,]-1,1[$ tel que $D^+u(x_0)\neq\varnothing$. Montrer que $D^+u(x_0)$ est un intervalle fermé.
7. On suppose dans cette question que $u$ est concave sur $[-1,1]$. Soit $x_0\in\,]-1,1[$.
   **(a)** Soient $y_1,y_2\in[-1,1]\backslash\{x_0\}$ avec $y_1<y_2$. Montrer que $\quad\frac{u(y_1)-u(x_0)}{y_1-x_0}\geqslant\frac{u(y_2)-u(x_0)}{y_2-x_0}$.
   **(b)** Montrer qu'il existe $\ell^+$ et $\ell^-\in\mathbb{R}$ tels que
   $$\frac{u(y)-u(x_0)}{y-x_0}\xrightarrow[y\to x_0^-]{}\ell^-\ \text{et}\ \frac{u(y)-u(x_0)}{y-x_0}\xrightarrow[y\to x_0^+]{}\ell^+,$$
   et que $D^+u(x_0)=[\ell^+,\ell^-]$.
   **(c)** Montrer que $\quad D^+u(x_0)=\{p\in\mathbb{R}\mid\forall x\in[-1,1],\ u(x)\leqslant u(x_0)+p(x-x_0)\}$.
   En déduire que $u$ admet un maximum en $x_0$ si et seulement si $0\in D^+u(x_0)$.

**Indications Exercice 4.**

4. **(a)** L'existence de la limite vient de la décroissance de la quantité, quand $\varepsilon$ décroît vers 0.
   **(c)** Il s'agit de justifier que $\varphi$ est continue, en 0 et ailleurs qu'en 0. Ce n'est pas simple...
6. Pour le caractère fermé, on pourra justifier le résultat intermédiaire suivant : si $\forall y$, $|g_1(y)-g_2(y)|\leqslant a$, et $g_1$ et $g_2$ admettent des bornes supérieures sur $I$, alors $|\sup g_1-\sup g_2|\leqslant a$.