DM n°21

Facultatif : Verso.

Exercice 1. Produits infinis. Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de complexes non nuls. On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. On dit que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si la suite (P_n) converge vers <u>une limite non nulle</u>. Si la suite (P_n) admet une limite, on la note $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$.

I. Préliminaires, et calculs de produits.

1) Montrer que si $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 1.

2) Justifier l'existence et calculer

a) $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)$ **b)** $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

II. On suppose dans cette question que (u_n) est une suite réelle strictement positive.

1) Montrer que $\prod_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $\sum \ln u_n$ converge.

2) Montrer que $\prod_{n\geqslant 0}(1+u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

III. Produits alternés. Étudier la convergence de

a) $\prod_{n\geqslant 2} \left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ **b)** $\prod_{n\geqslant 2} \left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$

IV. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $\forall n,\ |u_n|<1$ et $\sum u_n$ converge.

1) Montrer que $\prod_{n\geqslant 0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe.

2) Montrer que $\prod_{n\geqslant 0}^{+\infty}(1+u_n)=0$ si et seulement si $\sum u_n^2$ diverge.

V. ★ Série des nombres premiers.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note p_n le n-ième nombre premier.

1) Soit $p\geqslant 2$ un entier. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$?

2) Justifier que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geqslant \sum_{m=1}^{p_n} \frac{1}{m}.$$

3) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On associe à tout couple $(u_0,u_1)\in\mathbb{R}^2$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0,u_1 et $\forall n\geqslant 1,\ u_{n+1}=u_n+a_{n-1}u_{n-1}$.

I. **1)** On suppose dans cette question que (a_n) est positive, ainsi que u_0 et u_1.

a) Étudier les variations de (u_n).

b) Montrer que pour tout $n\geqslant 2$, $u_{n+1}\leqslant u_n e^{a_{n-1}}$. En déduire que si $\sum a_n$ converge, alors (u_n) converge.

c) On suppose réciproquement que (u_n) converge, et que $u_1>0$.

Montrer qu'il existe $k>0$ et n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, $a_{n-1}\leqslant k(u_{n+1}-u_n)$. En déduire que $\sum a_n$ converge.

2) On suppose que $\sum a_n$ converge absolument.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0=|u_0|$, $v_1=|u_1|$ et $\forall n\geqslant 1$, $v_{n+1}=v_n+|a_{n-1}|v_{n-1}$.

a) Comparer $|u_n|$ et v_n. Justifier.

b) Montrer que $\sum |u_{n+1}-u_n|$ converge. En déduire que (u_n) converge.

II. Étude des suites (u_n) de limite nulle.

On suppose que les a_n sont strictement positifs, et que $\sum a_n$ converge.

On note $L(u_0,u_1)$ la limite de la suite (u_n) (qui existe d'après la première partie).

1) Montrer que $L\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad (u_0,u_1)\mapsto L(u_0,u_1)$ est linéaire.

Dans la suite, on suppose $(u_0,u_1)\neq(0,0)$.

2) On note $N=\operatorname{Ker} L$.

a) Montrer que s'il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $u_m=0$, alors $L(u_0,u_1)\neq 0$.

b) Montrer que $\dim N=1$.

3) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe alterné si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_nu_{n+1}<0$.

a) Montrer que $(u_0,u_1)\in N$ si et seulement si (u_n) est de signe alterné.

b) Le rapport $r_0=-\frac{u_1}{u_0}$ dépend-t-il de $(u_0,u_1)\in N$?

Exercice 3. Transformation, et sommation d'Abel. Transformation d'Abel.

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles. On note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = b_n A_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Cette transformation est à interpréter comme une intégration par partie : la suite (A_n) est «l'intégrale» de (a_n), la suite $(b_{n+1} - b_n)$ est la «dérivée» de la suite (b_n).

2) Théorème d'Abel.

On suppose que la suite (b_n) est positive, décroissante et tend vers 0, et que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

a) Montrer que la série $\sum (b_k - b_{k+1}) A_k$ est absolument convergente.

b) En déduire la nature de $\sum a_n b_n$.

3) Application : soit $\alpha \in]0,\pi[$, on considère la série de terme général $u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{n+1}$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge.

Il en va de même de toute série de la forme $\sum \frac{\cos(n\beta)}{n+1}$.

b) Montrer que $\sum |u_n|$ diverge. On pourra utiliser $|\sin| \geqslant |\sin|^2$.

Exercice 4. ★ Soit σ une permutation de $\mathbb{N}$.

1. **(a)** Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)}$? **(b)** Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$?

2. ★ Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 5. ★ On considère la suite réelle définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $n^2 = o_{+\infty}(x_n)$.

2. Montrer que $\left(\frac{\ln(x_n)}{2^n}\right)$ converge.

3. Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que $x_n \sim C^{2^n} n^2$ quand $n \to +\infty$.

Indications Exercice 1.

I. **1)** Raisonner proprement, avec la suite (P_n). Il faut qu'apparaisse le fait que la limite de (P_n) est non nulle.

2) Ce sont des produits télescopiques.

II. **1)** Raisonner proprement, avec les sommes/produits partiels.

2) Si $u_n \to 0$, alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$.

III. **b)** On trouve 0.

IV. **2)** Utilise un $DL_2(0)$ du logarithme.

V. **2)** $\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ est une somme infinie, qui est donc supérieure à des sommes finies, par exemple où l'on ne garde que les dénominateurs $\leqslant p_n$, et on sait faire le produit de sommes finies.

Indications Exercice 2.

I. **1)** **a)** Commencer par identifier une propriété de la suite (u_n) à démontrer par récurrence d'ordre 2.

b) Utiliser $e^x \geqslant 1 + x$. Pour la seconde partie, on a la majoration $u_n \leqslant u_2 e^{a_{n-1}+\cdots+a_1}$.

c) Pour la première partie : écrire $u_{n+1} - u_n = a_{n-1} u_{n-1}$. Quelle information sur la suite (u_n) permet-elle de conclure ?

Pour la seconde partie, (u_n) converge si et seulement si $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

2) **b)** On sait que (v_n) converge (partie précédente), donc est majorée.

À nouveau, montrer que (u_n) converge revient à montrer que $\sum \left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge.

II. **1)** Il suffit de justifier que l'application φ qui à (u_0, u_1) associe l'unique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie l'équation de récurrence est linéaire.

Alors, l'application qui à une suite associe sa limite est linéaire.

2) **b)** Appliquer le théorème du rang.

Indications Exercice 4.

2. Elle diverge. Ou bien par l'inégalité du réordonnement, ou bien en justifiant que pour tout n_0, il existe un entier n assez grand tel que au moins $\frac{n}{2}$ des valeurs $\sigma(k)$ entre n_0 et n vérifient $\sigma(k) \geqslant \frac{k}{10}$.