DM n°22

Exercices 5, 6 facultatifs.

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum \frac{x^n}{n}$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 2. On considère une suite définie par $u_0 \in]0,\pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Convergence et limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. À l'aide de $\sum (u_{n+1} - u_n)$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
3. À l'aide de $\ln(u_{n+1}) - \ln u_n$, montrer que $\sum u_n^2$ diverge.

Exercice 3. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \binom{2n}{n}^{-1}$
2. $\sum \frac{4^n}{n} \binom{2n}{n}^{-1}$

Exercice 4. Discuter, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de $\sum \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$.

Exercice 5. ★ **Raabe-Duhamel**. Soit (u_n) une suite strictement positive telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$.

Exercice 6. ★ **Opération d'un groupe sur un ensemble**. Une opération d'un groupe G sur un ensemble E est un morphisme $g \mapsto \sigma_g$ de G dans $(\mathcal{S}(E), \circ)$. On note généralement $g \cdot x = \sigma_g(x)$. La propriété de morphisme s'écrit $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Soit $x \in E$. L'orbite de E est $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x,\, g \in G\}$ et le stabilisateur de x est le sous-groupe $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ de G.

On dit que l'action est transitive lorsqu'il n'existe qu'une seule orbite, c'est-à-dire $\mathcal{O}_x = E$ pour tout $x \in E$.

Exemples : On peut faire agir G sur lui-même, par exemple

(*i*) par automorphisme intérieur, avec $\sigma_a : G \to G \quad x \mapsto axa^{-1}$ pour tout $a \in G$.

(*ii*) par translation à gauche, avec $\sigma_a : G \to G \quad x \mapsto ax$ pour tout $a \in G$.

I. Théorème de Cayley. Soit G un groupe de cardinal n.

1) Montrer qu'il existe un morphisme injectif de G dans le groupe symétrique $(S_n, \circ)$.

2) En déduire qu'il existe un morphisme injectif de G dans le groupe linéaire $(GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$.

Autrement dit, G est isomorphe à un sous-groupe de S_n et à un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \times)$.

II. Formule des classes.

1) Démontrer que les orbites $\mathcal{O}_x$ forment une partition de E, (au sens où, entre autres, deux orbites distinctes sont disjointes).

2) Démontrer que si $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$, alors $\operatorname{Card} G_x = \operatorname{Card} G_y$.

3) Démontrer que $\operatorname{Card} \mathcal{O}_x = \frac{\operatorname{Card} G}{\operatorname{Card} G_x}$.

4) On note A l'ensemble des orbites, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$.

Justifier la formule des classes :

$$\operatorname{Card} E = \sum_{\bar{x} \in A} \frac{\operatorname{Card} G}{\operatorname{Card} G_x}.$$

III. Formule de Burnside.

Pour $g \in G$, on note F_g l'ensemble des points fixes de σ_g, c'est-à-dire $F_g = \{x \in E \mid g \cdot x = x\}$.

1) Montrer la formule de Burnside donnant le nombre d'orbites :

$$\operatorname{Card} A = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{Card}(F_g).$$

2) En déduire que si l'action de G sur E est transitive, alors, lorsque g décrit G, le nombre moyen de points fixes de σ_g est 1.

3) Démontrer que le nombre moyen de points fixes d'une permutation $\sigma \in S_n$ vaut 1.

IV. Application combinatoire.

On cherche à dénombrer le nombre de colliers de $n = 67$ perles, dont 2 sont noires, 2 sont jaunes, 7 sont rouges et 56 sont blanches.

On peut construire un collier en choisissant une coloration de $\mathbb{U}_{67}$, avec les couleurs spécifiées, et on convient que deux colorations de $\mathbb{U}_{67}$ donnent le même collier si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en effectuant un certain nombre de rotations, d'angles $\frac{2k\pi}{n}$, et de symétries par rapport à l'axe des abscisses.

1) On considère le groupe $\mathcal{D}_{2n}$ engendré par les transformations du plan $r : z \mapsto e^{2i\frac{\pi}{n}} z$ et $s : z \mapsto \overline{z}$.

On remarque que les transformations $g \in \mathcal{D}_{2n}$ préservent les distances et vérifient $g(\mathbb{U}_n) = \mathbb{U}_n$.

a) Soit $g \in \mathcal{D}_{2n}$. Montrer soigneusement qu'il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $g = r^i$, ou $g = s \circ r^i$. En déduire $|\mathcal{D}_{2n}|$.

b) À l'aide de la formule de Burnside, déterminer le nombre de colliers recherché.

V. Étude des p-groupes.

1) Soit G un groupe fini de cardinal p^m opérant sur un ensemble E. On pose $X = \{x \in E \mid \forall g \in G,\, g \cdot x = x\}$.
Déduire de la formule des classes que p divise $\operatorname{Card} E - \operatorname{Card} X$.

2) Soit G un p-groupe, c'est-à-dire un groupe fini de cardinal p^m, où $m \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que le centre $\mathcal{Z} = \{x \in G \mid \forall a \in G,\, ax = xa\}$ de G n'est pas réduit à $\{e\}$.

3) Exemple : On considère H le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures de $GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Expliciter $\operatorname{Card} H$ et le centre de H.

VI. Le premier théorème de Sylow.

Soit G un groupe de cardinal $n = p^r m$, où p est premier et m premier avec p, c'est-à-dire $r = v_p(n)$.

On se propose de prouver qu'il existe dans G un sous-groupe d'ordre p^r, appelé p-Sylow de G.

1) Considérons dans cette question $G = GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. On considère le sous-groupe S des matrices unipotentes supérieures. Expliciter $\operatorname{Card} GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, et vérifier que S est un p-Sylow de G.

2) Soit $(G, \cdot)$ un groupe de cardinal $n = p^r m$ admettant un p-Sylow S d'ordre p^r.
Soit H un sous-groupe de G. On fait opérer H sur l'ensemble G/S des classes à gauche aS du sous-groupe S dans G. Autrement dit, pour tout $h \in H$, on considère $h \cdot (aS) = (ha) \cdot S$.
Démontrer que le stabilisateur de aS est le sous-groupe $\left(aSa^{-1}\right) \cap H$. Déduire de la formule des classes qu'il existe $a \in G$ tel que $\left(aSa^{-1}\right) \cap H$ est un p-Sylow de H.

3) Déduire des questions précédentes et de la question I. le théorème de Sylow : tout groupe fini admet un p-Sylow.

Indications Exercice 1. Pour la somme, cf le développement en série de $\ln(1+x)$.

Indications Exercice 3.

2. Il suffirait de minorer $\binom{2n}{n}$.

Indications Exercice 4. Considérer les sommes partielles S_{n^2}.

Indications Exercice 5. Montrer que $(u_n n^\alpha)$ converge, en étudiant la série dérivée.

Indications Exercice 6.

I. **1)** Faire opérer G sur G par translation. Vérifier que le morphisme considéré est injectif.

III. **1)** Calculer de deux façons le cardinal de $\{(g,x) \in G \times E \mid g \cdot x = x\}$.

3) Faire opérer S_n sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

IV. **2)** Faire opérer G sur G par automorphisme intérieur, c'est-à-dire $a \cdot x = axa^{-1}$ pour tout $(a,x) \in G \times G$. Montrer que $p \mid \operatorname{Card} Z$.

VI. **2)** Il y a m classes (aS) dans G/S. Ainsi, p ne divise pas card (G/S).