DM n°23

Exercice 1.

I. Préliminaires.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique.

1) Soit $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} u$. Justifier l'existence d'une famille $(e_1, \dots, e_r)$ telle que $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(e_1, \dots, e_r)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, \dots, e_r)$ est isomorphe à $\operatorname{Im} u$.

En déduire que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

3) Décrire deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Qu'a-t-on démontré sur la matrice A ?

II. Application.

On considère une application $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ non constante telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.

1) Justifier que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f(O_n)(1 - f(M)) = 0$. En déduire que $f(O_n) = 0$.

2) Montrer de même que $f(I_n) = 1$, puis que pour toute matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) \neq 0$.

3) Soit $r \in [\![1, n]\!]$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et on considère $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire vérifiant $u(e_1) = u(e_2) = \cdots = u(e_r) = \vec{0}$, $u(e_{r+1}) = e_1, u(e_{r+2}) = e_2, \dots, u(e_n) = e_{n-r}$.

Expliciter $M_r = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Quel est le rang de M_r ? Justifier que M_r est nilpotente.

En déduire la valeur de $f(M_r)$.

4) Soit A une matrice de rang $r < n$. Montrer que $f(A) = 0$.

5) Qu'en conclure pour l'application f ? Donner deux exemples de telles applications.

Exercice 2. On se propose de montrer que dans $\mathcal{M}_n(K)$, toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

On note $E = \mathcal{M}_n(K)$. Pour $A = (a_{ij}) \in E$,on pose $\operatorname{Tr} a = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, appelé trace de A. On note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de E des matrices de trace nulle, $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel de E des matrices de diagonale nulle, $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de E des matrices diagonales et $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel des homothéties λI_n, pour $\lambda \in K$.

I. 1) Donner sans justifier les dimensions de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{H}$.

2) Montrer que $E = \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$.

II. 1) Soient $A, B \in E$. Montrer que $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

2) Soit $\varphi\colon E \to K$ une forme linéaire de E vérifiant $\forall A, B \in E, \varphi(AB) = \varphi(BA)$. En considérant les matrices E_{ij} de la base canonique de E, montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{Tr}$.

III. Soit $M \in \mathcal{D}$ une matrice diagonale, dont les termes diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ sont deux à deux distincts. On considère l'application $u\colon E \to E$ définie par $u(A) = AM - MA$.

1) Montrer que les seules matrices commutant avec M sont les matrices diagonales.

2) Montrer que $\operatorname{Im} u = \mathcal{G}$.

IV. Soit F un K-espace vectoriel et u un endomorphisme de F.

1) On suppose qu'il existe x, y deux vecteurs non nuls, et λ, μ deux scalaires distincts tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$. On considère $z = x + y$. Montrer que $u(z)$ n'est pas colinéaire à z.

2) On suppose que u n'est pas une homothétie vectorielle. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in F$ tel que $u(x)$ ne soit pas colinéaire à x.

V. 1) Montrer que si $P \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ est inversible, alors $\tilde{P} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, et expliciter son inverse.

2) Soit A une matrice non nulle de trace nulle. On note u l'endomorphisme de K^n associé à A.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de K^n telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ soit de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & A_1 \\ \vdots & \end{array}\right)$.

3) Montrer que toute matrice A de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

VI. En déduire que les matrices de trace nulle sont les matrices de la forme $BC - CB$, avec $B, C \in \mathcal{M}_n(K)$.

Exercice 3. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ si et seulement s'il existe P inversible telle que $B = PA$.

Exercice 4. ★ Structure des groupes abéliens finis.

I. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$.

1) On suppose que n, m sont premiers entre eux. On note, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{k}^n$ la classe de k modulo n. Justifier que l'application

$$\varphi\colon \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \quad \overline{k}^{nm} \mapsto (\overline{k}^n, \overline{k}^m)$$

est bien définie et que c'est un isomorphisme d'anneaux.

2) Donner une CNS sur n et m pour que les groupes $(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), +)$ soient isomorphes.

II. Soit $(G, +)$ un groupe abélien libre de type fini : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(G, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}^n, +)$. Autrement dit, il existe une $\mathbb{Z}$-base finie $e = (e_1, \ldots, e_n)$, ce qui signifie que tout $x \in G$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n$, où $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Les deux questions sont indépendantes.

1) Soit $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une famille d'éléments de G. Montrer que e' est une $\mathbb{Z}$-base de G ssi la matrice de passage de e à e' est une matrice inversible appartenant à $GL_n(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire inversible dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

2) Montrer que tout sous-groupe G' de G admet une $\mathbb{Z}$-base de cardinal $r \leqslant n$.

III. Équivalence de matrices entières. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, il existe deux matrices $P, Q \in GL_2(\mathbb{Z})$ telles que $PAQ = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, avec $d_1 \mid d_2$.

Dans la suite, on admet le résultat suivant : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, il existe deux matrices P et $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ et un n-uplet $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $PAQ = \operatorname{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ et que d_i divise d_{i+1} pour tout $1 \leqslant i < n$.

IV. On considère un sous-groupe G de $(\mathbb{Z}^n, +)$.

Montrer qu'il existe une $\mathbb{Z}$-base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{Z}^n$ et un r-uplet $(d_1, \ldots, d_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que $(d_1\varepsilon_1, \ldots, d_r\varepsilon_r)$ est une $\mathbb{Z}$-base de G et que d_i divise d_{i+1} pour tout $1 \leqslant i < r$.

V. Soit $(H, +)$ un groupe abélien fini.

1) Montrer qu'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et des entiers $d_1, \ldots, d_r$ qui sont $\geqslant 2$ et tels que d_i divise d_{i+1} pour tout $1 \leqslant i < r$ et que H est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z})$.

Indication : On pose $H = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Considérer le morphisme surjectif $\varphi\colon \mathbb{Z}^n \to H$ $(k_1, \ldots, k_n) \mapsto k_1x_1 + \ldots + k_nx_n$. On considère $(d_1\varepsilon_1, \ldots, d_n\varepsilon_n)$ une $\mathbb{Z}$-base de $G = \operatorname{Ker}\varphi$, où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}^n$. On pose $y_i = \varphi(\varepsilon_i)$. Expliciter un isomorphisme $\tilde{\varphi}$ de $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z})$ dans H.

2) Démontrer l'unicité des d_i.

Exercice 5. ★ Théorème de Brauer. Montrer que $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si les matrices de permutation M_σ et $M_{\sigma'}$ sont conjuguées.

Indications Exercice 1.

II. **2)** Écrire $f(M) = f(MI_n) = f(M)f(I_n)$. Si la fonction f n'est pas constante égale à 0, on obtient $f(I_n) = 1$.

3) Une fois que M_r est nilpotente, on écrit $M_r^p = O_n$, et on applique f, ainsi que la propriété $f(AB) = f(A)f(B)$.

4) Écrire que A est équivalente à M_r.

Indications Exercice 2.

II. **2)** Rappel : $E_{ij}E_{jk} = E_{ik}$, et $E_{ij}E_{j'k} = 0$, si $j \neq j'$.

III. **2)** La question précédente donne une information sur le noyau de u.

V. **1)** On montre que $\tilde{P}$ est inversible en explicitant son inverse.

2) Utiliser la partie précédente : il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $u(x)$ ne soit pas colinéaire à x, donc $(x, u(x))$ est libre. On cherche une base...

3) Utiliser les deux questions précédentes.

Indications Exercice 4.

I. **2)** Justifier que si n, m admettent un diviseur d en commun, les groupes ne sont pas isomorphes, par exemple en comptant les éléments x vérifiant $d \cdot x = \overline{0}$.

II. **2)** Récurrence sur n.

III. L'idée fondamentale est qu'en multipliant par des transvections à gauche, on agit sur les lignes de A, et on peut effectuer l'algorithme d'Euclide sur les coefficients de la première colonne pour au final se ramener à une première colonne de coefficients $(d, 0)$, où d est le pgcd des deux coefficients d'origine. Une fois une matrice triangulaire supérieure obtenue, si le pgcd des deux coefficients du haut n'est pas égal au pgcd des trois coefficients, alors après une opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, c'est le cas.

IV. On sait que G admet une $\mathbb{Z}$-base. En notant A la matrice dont les premières colonnes forment cette $\mathbb{Z}$-base, et les autres sont nuls, on cherche $P, Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ tel que $PA = Q\operatorname{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

Indications Exercice 5. En termes de leurs orbites, à quelle condition σ et σ' sont-elles conjuguées ? Comprendre comment lire cela sur les matrices (commencer par le nombre de points fixes).