DM n°26

Exercice 1.

I. Polynômes et déterminants.

Pour $d \in \mathbb{R}$ et $k \geqslant 1$, on note $(d)_k = d(d-1)\dots(d-k+1)$. On suppose $n \geqslant 2$ et on considère les déterminants

$$V(d_1,\dots,d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & \dots & d_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D(d_1,\dots,d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ (d_1)_1 & (d_2)_1 & \dots & (d_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (d_1)_{n-1} & (d_2)_{n-1} & \dots & (d_n)_{n-1} \end{vmatrix}.$$

1) Soit P un polynôme unitaire de degré $n-1$. Montrer que

$$V(d_1,\dots,d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1^{n-2} & d_2^{n-2} & \dots & d_n^{n-2} \\ P(d_1) & P(d_2) & \dots & P(d_n) \end{vmatrix}$$

2) En déduire $V(d_1,\dots,d_n) = V(d_1,\dots,d_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(d_n - d_i)$.

3) Rappeler sans justifier la valeur de $V(d_1,\dots,d_n)$.

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $P_k = X(X-1)\dots(X-k+1)$, et $P_0 = 1$. Montrer que les $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ forment une famille libre. En déduire que $P_{p+1} - X^{p+1} \in \operatorname{Vect}(P_0,\dots,P_p)$.

5) Montrer que $D(d_1,\cdots,d_n) = V(d_1,\cdots,d_n)$.

II. Wronskien, et propriétés élémentaires.

On fixe un intervalle $I =]a,b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soient $f_1,\cdots,f_n$ des fonctions de $I \to \mathbb{R}$, $(n-1)$ fois dérivables sur I. Leur Wronskien $W_n(f_1,\cdots,f_n)$ est la fonction définie sur I par

$$W_n(f_1,\cdots,f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

1) Soient $d_1,\dots,d_n \geqslant n$ des entiers. Montrer que le Wronskien des fonctions $\left(a_1 x^{d_1},\dots,a_n x^{d_n}\right)$ est égal à

$$V(d_1,\cdots,d_n)\, x^{d_1+\cdots+d_n-\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

2) Soit g une fonction $(n-1)$ fois dérivable sur I, montrer que $W_n(f_1 g, f_2 g,\cdots,f_n g) = g^n W_n(f_1,\cdots,f_n)$.

3) En déduire que pour f_1 ne s'annulant pas sur I, on a

$$W_n(f_1,\cdots,f_n) = f_1^n W_{n-1}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \left(\frac{f_3}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right).$$

III. Annulation de la fonction Wronskien. On note $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ l'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

1) Montrer que si $f_1,\cdots,f_n$ forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ alors la fonction $W_n(f_1,\cdots,f_n)$ est nulle sur I.

2) Soit f_1 et f_2 deux éléments de $\mathcal{C}^{n-1}(I)$. On suppose que $W_2(f_1,f_2) = 0$ sur I et que $f_1 f_2$ ne s'annule pas sur I. Montrer alors que la famille (f_1,f_2) est liée.

Indication : Reconnaître une expression qui ressemble à la dérivée d'une certaine fonction.

3) Donner un exemple de fonctions f_1, f_2 dérivables sur $[0,2]$ formant une famille libre et telles que $W_2(f_1,f_2) = 0$.

4) En utilisant la question II.3), montrer que si $W_n(f_1,\cdots,f_n)$ est la fonction nulle sur I, alors il existe un sous-intervalle $J \subset I$, sur lequel les restrictions de $f_1,\cdots,f_n$ à J forment une famille liée dans $\mathcal{C}^{n-1}(J)$.

Indication : Procéder par récurrence. Justifier que si une des fonctions est non nulle en un point, alors elle est non nulle sur un intervalle J autour de ce point.

IV. Comportement local du Wronskien.

On suppose à présent que $0 \in I$ et que les fonctions $f_1,\dots,f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et forment une famille libre. Elles admettent donc des développements limités à tout ordre en 0. Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit son ordre en 0 comme le plus petit entier naturel d tel que $f^{(d)}(0) \neq 0$, s'il en existe un. On fait l'hypothèse que toute fonction non nulle de $\operatorname{Vect}(f_1,\dots,f_n)$ admet bien un ordre.

1) On s'intéresse au cas $n = 2$. Montrer qu'il existe deux fonctions g_1, g_2 de classes $\mathcal{C}^\infty$ avec des ordres distincts, et une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible telle que $(f_1,f_2)A = (g_1,g_2)$, c'est-à-dire $g_1 = af_1 + cf_2$ et $g_2 = bf_1 + df_2$.

Indication : On peut prendre $g_1 = f_1$, puis choisir b, d judicieusement.

2) ★ Démontrer qu'il existe une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$(f_1,\dots,f_n)\,A = (g_1,\dots,g_n),$$

où les $g_1,\dots,g_n$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ avec des ordres deux à deux distincts.

On souhaite démontrer que pour ces fonctions $(g_1,\dots,g_n)$, dont on note $(d_1,\dots,d_n)$ les ordres, il existe un réel $C \neq 0$ tel que

$$W_n(g_1,\dots,g_n)(x) = Cx^{d_1+\dots+d_n-\binom{n}{2}}\left(1 + o_{x\to 0}(1)\right) \quad (*)$$

3) On note $g_i(x) = a_i x^{d_i} + o_0(x^{d_i})$. Pour $j \leqslant d_i$, donner un équivalent de $g_i^{(j)}(x)$, quand $x \to 0$. Justifier.
En utilisant la forme développée du déterminant, montrer $(*)$ dans le cas où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $d_i \geqslant n-1$.

4) On choisit un entier a tel que pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait $d_i + a \geqslant n-1$. En utilisant la question II.2) avec $g(x) = x^a$, montrer $(*)$.

5) En déduire que $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est non nulle sur voisinage de 0 privé de 0.

Indications Exercice 1.

I. 4) Justifier que $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_p) = \mathbb{R}_p[X]$.

5) On peut ou bien commencer par transformer la dernière ligne en $d_1^{n-1}, \dots, d_n^{n-1}$ en utilisant la question précédente, ou commencer plutôt par simplifier la seconde ligne, puis la troisième etc.

II. **2)** Commencer par traiter proprement le cas $n = 2$. Écrire la formule de Leibniz, en rappelant ses hypothèses.

3) Chercher à utiliser la question précédente : écrire $(f_1, \dots, f_n) = (f_1 \frac{f_1}{f_1}, f_1 \frac{f_2}{f_1}, \dots, f_1 \frac{f_n}{f_1})$.

III. **1)** Écrire proprement ce qu'est une relation de liaison sur $f_1, \dots, f_n$. Comment en déduire une relation de liaison sur les lignes ou les colonnes de la matrice définissant $W_n(f_1, \dots, f_n)$?

2) Considérer $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'$.

3) Considérer une paire de deux fonctions telles que $f_1' f_2 = \tilde{0}$ et $f_2 f_1' = \tilde{0}$, en prenant f_1, f_2 nulles sur des intervalles. On pourra se contenter d'un schéma avec leurs graphes.

IV. **2)** Procéder par récurrence. Choisir f_i d'ordre minimal. Quitte à multiplier $(f_1, \dots, f_n)$ par une matrice de permutation, on peut supposer que f_1 est d'ordre minimal. Puis en retirant à $f_2, \dots, f_n$ un multiple de f_1 (ce qui correspond à une multiplication par une matrice), on peut supposer que $f_2, \dots, f_n$ sont d'ordre $> d_1$.

3) On ne peut pas, a priori, dériver un développement limité. Pour la seconde partie : en utilisant l'équivalent trouvé, le déterminant est une somme de facteurs, qui sont tous de la forme demandée. On obtient l'existence d'une telle constante C. La difficulté étant de montrer que $C \neq 0$.

Exercice 2. ★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \colon I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.

1. Soient $x_0, \dots, x_{n-1}$ des points de I.

(a) Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, \dots, x_{n-1}$. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $c \in I$ tel que
$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i).$$

(b) On note $V(x_0, \dots, x_n)$ le déterminant de Vandermonde. Montrer qu'il existe $\tau \in I$ tel que
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\tau)}{n!} V(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

2. On suppose que $n = 2$, que I est un segment et que f est strictement convexe. On note $\Gamma_f = \{(x, f(x)),\, x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ le graphe de f. Montrer qu'il existe une constante C, dépendant uniquement de I et f, telle que le nombre de points de $\Gamma_f \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^2$ soit majoré par $CN^{2/3}$ pour tout entier $N \geqslant 1$.

Exercice 3. ★ Soit (e_1, e_2) une famille libre de $\mathbb{R}^2$. On pose $L = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ et on note $\mathrm{coVol}(L) = |\det(e_1, e_2)|$.

1. Pour $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, représenter L dans $\mathbb{R}^2$. Que représente géométriquement le covolume $\mathrm{coVol}(L)$?

2. Soit A un disque fermé de $\mathbb{R}^2$, d'aire strictement supérieure a $\mathrm{coVol}(L)$. Montrer qu'il existe deux éléments distincts x et y de A tels que $x - y \in L$.

Indication : Les parallélogrammes du réseau L découpent le disque A en un nombre fini de morceaux A_i. Considérer les translatés A_i' des A_i, déplacés dans le parallélogramme à l'origine de $\mathbb{R}^2$, appliquer l'hypothèse.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe dans $L \backslash \{0\}$ un élément ℓ tel que $\|\ell\| \leqslant \frac{2+\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathrm{coVol}(L)}$.

4. Soit p un nombre premier congru a 1 modulo 4.

(a) En considérant $m = (p-1)!$, montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{Z}$ tel que p divise $1 + \omega^2$.

(b) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $p = a^2 + b^2$.

Exercice 4. ★ **Liberté d'une famille de fonctions**. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f_1, \dots, f_n$ des éléments de E. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans E si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ soit inversible.

Indications Exercice 2.

1. **(a)** Choisir λ tel que $f(x) - P(x) - \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i) = 0$.

2. Pour utiliser la question précédente, écrire qu'en un triplet de tels points, le déterminant donné est un multiple de $1/N^2$. En particulier, s'il est non nul, il est $\geqslant \frac{1}{N^2}$. Faire éventuellement l'hypothèse que $f'' \neq 0$.

Indications Exercice 3. Pour la dernière question, introduire un réseau de $\mathbb{R}^2$ dont p divise les normes de tous les éléments.

Indications Exercice 4. Pour le sens non trivial, procéder par récurrence et contraposée. Si une famille $(X_1, \dots, X_n)$ est liée et $(X_1, \dots, X_{n-1})$ est libre, il existe une «unique» relation de liaison sur $(X_1, \dots, X_n)$ (à un facteur près).