DM n°27

À rendre lundi.

Exercice 1. Révisions d'analyse.

1. (a) Montrer qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que $\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\frac{4^n}{\sqrt{n}}$.
   (b) Discuter, de la nature de la série $\sum x^n \binom{2n}{n}$,
      i. en fonction de $x \in \mathbb{R}_+$.
      ii. en fonction de $x \in \mathbb{R}_-$.
2. Si $\alpha \in]0,1[$, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
3. Si $\alpha \in]1,+\infty[$, montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
4. (a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha \colon x \mapsto (1-x)^\alpha$. Donner sans justifier une expression, pour $n \geqslant 0$, de $f_\alpha^{(n)}$.
   Pour $g \colon x \mapsto f_{-1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, montrer que $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.
   (b) Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange, puis établir
$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k.$$

Exercice 2. ♣ Théorème de Legendre.

1. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit a, b deux entiers positifs non nuls. Montrer que le nombre de multiples non nuls de a inférieurs ou égaux à b est $E(\frac{b}{a})$, où $E(x)$ est la partie entière de x.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre d'entiers k de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $v_p(k) = \alpha$, c'est-à-dire multiples de p^α, mais non multiples de $p^{\alpha+1}$?
   (c) Montrer que $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} E(\frac{n}{p^k})$
2. Déterminer le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de 100!.

Exercice 3. Critère d'irréductibilité de Perron : un exemple. Pour $n \geqslant 3$, on considère le polynôme $P_n = X^{n+1} - nX^n + 1$

1. Montrer que P_n n'admet aucune racine complexe de module 1, et au moins une racine complexe de module > 1, que l'on note x_1.
2. On factorise $P = (X - x_1)Q$, où $Q = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i X^i$. Montrer que $\sum_{i=0}^{n-1} |q_i| < 1$.
3. En déduire que x_1 est la seule racine de P_n de valeur absolue $\geqslant 1$.
4. Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

En général, si $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ et $|a_{n-1}| > 1 + \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|$, alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 4. ★ Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{Z}$ deux à deux distincts. Montrer que le polynôme $P = (X - a_1)\ldots(X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 5. ★ Soient $e_r > \cdots > e_2 > e_1 \geqslant 0$ des entiers, $n = \sum_{k=1}^{r} 2^{e_k}$ et $X = \{s \in \mathbb{N} \text{ tq } 2^s \mid n!\}$.

1. Montrer que $\max X = n - r$.
2. Montrer que le nombre d'entiers k tels que $\binom{n}{k}$ est impair est 2^r.

Indications Exercice 1.

1. (b) i. Traiter les cas $x \in [0, 1/4[$ et $x \geqslant 1/4$.
   ii. Le cas $x = \frac{-1}{4}$ demande de travailler.
3. Encadrer $\sum_{k=n+1}^{N}$, puis faire tendre N vers l'infini.

Indications Exercice 3.

1. Pour la première partie : écrire $P(z) = 0$, isoler un terme. Pour la seconde partie : que vaut le produit des racines de P_n ?
3. Il s'agit de justifier que Q ne peut pas admettre une racine de module > 1, raisonner par l'absurde, écrire $Q(z) = 0$ et isoler z^n.

Indications Exercice 4. Écrire $P = AB$, évaluer en a_i. Introduire un polynôme C à partir de A et B, qui a beaucoup de racines.

Indications Exercice 5.

2. Réfléchir en termes d'addition binaire. Quand on fait la somme de deux nombres en binaire, le nombre de 1 du résultat est toujours inférieur à la somme des nombres de 1 de chaque sommande. Quel est le cas d'égalité ?