DM n°28

Exercice 1. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \langle \Phi_m, \Phi_n\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $V_\Phi^n = \mathrm{Vect}(\Phi_k)_{k\leqslant n}$, $V_\Phi = \mathrm{Vect}(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, P_Φ^n la projection orthogonale de E sur V_Φ^n et $d_\Phi^n(f)$ la distance de $f \in E$ à V_Φ^n.
On pose $C_0 = \tilde{1}$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \colon x \mapsto \sqrt{2}\cos(n\pi x)$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n \colon x \mapsto \sqrt{2}\sin\big((n+1)\pi x\big)$.

I. Généralités sur les suites orthonormales.

1) Montrer brièvement que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

2) Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.

De même, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale. Résultat que l'on pourra admettre dans la suite.

3) Soit Φ une suite orthonormale de E, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

a) Rappeler le théorème de Pythagore, à deux vecteurs.

b) Montrer que $\|f\|^2 = \|P_\Phi^n(f)\|^2 + d_\Phi^n(f)^2$.

c) Calculer $\sup\limits_{f\in E,\, \|f\|=1} \|P_\Phi^n(f)\|$.

d) Expliciter $P_\Phi^n(f)$ dans la base $(\Phi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En déduire que $\sum \langle f, \Phi_k\rangle^2$ converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \langle f, \Phi_k\rangle^2 \leqslant \|f\|^2.$$

e) Pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, exprimer $\langle f, C_n\rangle$ en fonction de $\langle f', S_{n-1}\rangle$. En déduire que $\sum n^2\langle f, C_n\rangle^2$ converge.

4) ★ Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Vect}(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $f \in E$. Montrer que si $\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\|f - P_\Phi^n(f)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En déduire que V_Φ est dense dans E si et seulement si $\forall f \in E$, $\|f - P_\Phi^n(f)\| \to 0$.

II. Suite orthonormale de polynômes de degrés échelonnés.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$, $P_n = U_n^{(n)}$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!}P_n$, le n-ième polynôme de Legendre.

On admet que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} \text{ si } n = m \end{cases}$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite de réels strictement positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les $Q_n = \alpha_n L_n(2x-1)$ forment une famille orthonormale de E. Préciser la valeur de α_n. On note $Q = (Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette famille orthonormale.

b) Montrer que si $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale de E telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ_n soit polynomiale, de degré n, alors $\forall n$, $\Phi_n = \pm Q_n$.

2) Expression à l'aide de déterminants.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \langle X^k, 1\rangle$, et on considère les matrices et déterminants de taille $n+1$

$$A = \left(\langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad P_n(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

a) Soit $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j A_j = \vec{0}$ une relation de liaison sur les colonnes de A. Montrer que le polynôme $P = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j X^{j-1}$ vérifie $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\langle P, X^{i-1}\rangle = 0$, puis que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

b) En comparant les coefficients de A et de Δ_n, montrer que $\Delta_n \neq 0$.

c) Montrer que $x \mapsto P_n(x)$ est une fonction polynomiale. Préciser son degré. On notera $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme associé.

d) ★ Montrer que pour $k < n$, $\langle P_n, X^k\rangle = 0$, et en déduire qu'il existe des coefficients $c_n \in \mathbb{R}^*$ tels que $\forall n$, $c_n P_n = Q_n$.

Exercice 2. ★ Théorème de Müntz-Szász. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$.

Pour $\alpha \geqslant 0$, on note $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$. On considère une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive strictement croissante, et on note $W_n = \mathrm{Vect}(\varphi_{\alpha_0}, \dots, \varphi_{\alpha_n})$.

On note $d_2(g, W_n) = \inf\{\|g-f\|_2\,,\ f \in W_n\}$ et $d_\infty(g, W_n) = \inf\{\|g-f\|_\infty\,,\ f \in W_n\}$.

L'objectif est d'étudier les conditions

$$(*_2) : \forall g \in E,\ d_2(g, W_n) \to 0 \quad \text{et} \quad (*_\infty) : \forall g \in E,\ d_\infty(g, W_n) \to 0.$$

I. **1)** Donner une interprétation du fait que pour tout $g \in E$, $d_\infty(g, \mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On admet ce résultat. En déduire que pour tout $g \in E$, $d_2(g, \mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Montrer que $(*_2)$ est vérifiée si et seulement si $\forall m \in \mathbb{N}$, $d_2(\varphi_m, W_n) \to 0$.

On admet que

$$(*) : \quad d_2(\varphi_m, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=0}^{n} \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1}.$$

3) Pour $m \in \mathbb{N}$, montrer que $\frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i+m+1} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$ si et seulement si $\alpha_i \to +\infty$.

4) En déduire que $(*_2)$ est équivalent à ce que $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

II. **1)** Montrer que $(*_\infty)$ implique $\alpha_0 = 0$.

2) Soit $f, g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ vérifiant $f(0) = g(0) = 0$. Montrer que $\|f-g\|_\infty \leqslant \|f' - g'\|_2$.

3) On suppose que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 1$ et $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Montrer $(*_\infty)$.

III. On souhaite démontrer $(*)$.

1) Déterminants de Gram et distance à un sous-espace vectoriel.

Pour $x_1, \dots, x_n \in E$, on note $G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de Gram.

a) Montrer que $\det G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

b) Montrer que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre,

$$d(u, Vect(e_1, \dots, e_n))^2 = \frac{\det G(u, e_1, \dots, e_n)}{\det G(e_1, \dots, e_n)}.$$

2) Déterminants de Cauchy.

Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des complexes, tels que $\forall i, j$, $\alpha_i + \beta_j \neq 0$, et $C = \left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

En procédant par récurrence sur n, et en considérant le déterminant comme une fraction rationnelle en β_n, montrer que

$$\det C = \frac{\prod_{i<j}(\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{i,j}(\alpha_i + \beta_j)}.$$

3) En déduire la relation $(*)$.

Indications Exercice 2.

III. **1)** **a)** Une relation de liaison sur les colonnes peut se traduire par le fait qu'un vecteur est orthogonal à tous les x_i.

b) On a $d(u, \mathrm{Vect}(e_i))^2 = \|u - p(u)\|^2$, et $p(u)$ est une combinaison linéaire des e_i.