

DM n°28 bis

Sujet ENS (plus simple que celui du DS) entièrement facultatif, à rendre dans deux semaines.

Exercice 1. ★ Si K est un sous-corps de \mathbb{C} on note $K[X]_n$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans K , de degré inférieur ou égal à n , et on note $K(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles $F(X) = P(X)/Q(X)$ avec $P, Q \in K[X]$ et $Q \neq 0$. L'inclusion de $K[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ se prolonge en une injection de corps $K(X) \rightarrow \mathbb{C}(X)$, et on se permettra dans la suite d'identifier $K(X)$ à un sous-corps de $\mathbb{C}(X)$.

Si A est un ensemble et si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction on note $Z(f) = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble de ses zéros et

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times \mathbb{C}$$

son graphe.

I. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $n \geq 2$ un entier. Montrer que si $g \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ vérifie $|Z(g)| \geq n$, alors $|Z(g^{(i)})| \geq n - i$ pour tout $1 \leq i \leq n - 1$.

II. Intersections atypiques et fractions rationnelles.

Pour $G(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux et $Q \neq 0$, on note $\mathcal{P}(G) = \{x \in \mathbb{C} \mid Q(x) = 0\}$ l'ensemble des pôles de G et on note abusivement $G: \mathbb{C} \setminus \mathcal{P}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction envoyant x sur $P(x)/Q(x)$.

A. Fractions rationnelles et rationalité

Soit K un sous-corps de \mathbb{C} et soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(K \setminus \mathcal{P}(F)) \cap K$ soit un ensemble infini. On se propose de montrer que $F \in K(X)$. On écrit $F(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P \in \mathbb{C}[X]_p$ et $Q \in \mathbb{C}[X]_q \setminus \{0\}$ pour certains entiers $p, q \geq 0$. On note $d = p + q + 1$.

1) Soient $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d \in K$. Montrer que l'application linéaire

$$\varphi: K[X]_p \times K[X]_q \rightarrow K^d, \quad \varphi(U, V) := (U(x_i) - y_i V(x_i))_{1 \leq i \leq d}$$

n'est pas injective.

2) Soient $x_1, \dots, x_d \in K \setminus \mathcal{P}(F)$ deux à deux distincts tels que $F(x_1), \dots, F(x_d) \in K$.

Montrer qu'il existe $U \in K[X]_p$ et $V \in K[X]_q$ tels que $(U, V) \neq (0, 0)$ et $P(x_i)V(x_i) = Q(x_i)U(x_i)$ pour $1 \leq i \leq d$. En déduire que $F \in K(X)$.

3) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(K \setminus \mathcal{P}(F)) \cap K$ soit un ensemble infini. Montrer que $F \in K(X)$.

B. Intersections avec le cercle unité

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On dit qu'une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ est spéciale si l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F) \mid F(z) \in \mathbb{U}\}$$

est infini. On se propose de décrire les fractions rationnelles spéciales.

Si $z \in \mathbb{C}$ on note \bar{z} son conjugué. Si $P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ on note $\bar{P}(X) = \sum_{i=0}^d \bar{a}_i X^i$.

Dans cette sous partie, on fixe $F(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \neq 0$. On pose $\bar{F}(X) = \bar{P}(X)/\bar{Q}(X)$ et $G(X) = \bar{F}(1/X)$.

1) **a)** Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F)$. Montrer que $F(z) \in \mathbb{U}$ si et seulement si $F(z)G(z) = 1$.

b) En déduire que F est spéciale si et seulement si $G(X) \cdot F(X) = 1$.

2) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $B_\alpha(X) = \frac{X-\alpha}{1-\bar{\alpha}X}$ est spéciale. Que vaut $B_\alpha(X)$ pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha \in \mathbb{U}$?

3) On suppose que F est spéciale.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \mathcal{P}(F)$. Montrer que $F(\alpha) = 0$ si et seulement si $1/\bar{\alpha} \in \mathcal{P}(F)$.

b) Montrer que si $F \in \mathbb{C}[X]$ alors il existe $c \in \mathbb{U}$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $F(X) = cX^d$.

c) Montrer qu'il existe des entiers d, n avec $n \geq 0$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $F(X) = X^d \prod_{i=1}^n B_{\alpha_i}(X)$.

On pourra écrire $F(X) = P(X)/Q(X)$ et raisonner par récurrence sur le nombre de racines de P .

C. Racines de l'unité

Soit Λ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un entier $n \geq 1$ vérifiant $z^n = 1$, i.e. Λ est l'ensemble des racines de l'unité dans \mathbb{C} . On se propose de décrire les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)) \subset \Lambda$.

Pour $n \geq 1$ on pose $\zeta_n = \exp(2i\pi/n) \in \Lambda$ et on note $\mathbb{Q}(\zeta_n) = \{F(\zeta_n) \mid F \in \mathbb{Q}(X) \text{ et } \zeta_n \notin \mathcal{P}(F)\}$.

Ainsi $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est un sous-corps de \mathbb{C} .

On note φ l'indicatrice d'Euler et on rappelle que $\varphi(1) = 1$ et que si $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ est la factorisation de $n \geq 2$, alors $\varphi(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i-1} (p_i - 1)$. On admet le résultat suivant :

Théorème 1 (admis). Pour tout $n \geq 1$ le corps $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension $\varphi(n)$.

On fixe dans les questions suivantes une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(1) = 1$. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j \geq 1}$ tels que pour tout $j \geq 1$ on a $n_j \geq 1$, $\zeta_{n_j} \notin \mathcal{P}(F)$ et $F(\zeta_{n_j}) \in \Lambda$.

1) Montrer que pour tout $j \geq 1$ il existe un unique $q_j \in \mathbb{Q} \cap]-1/2, 1/2]$ tel que $F(\zeta_{n_j}) = \exp(2i\pi q_j)$.

2) Montrer que $\lim_{j \rightarrow +\infty} q_j = 0$.

- 3) a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(1) = 0$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nP(\zeta_n)$.
 b) Calculer $\lim_{j \rightarrow +\infty} n_j (F(\zeta_{n_j}) - 1)$ et en déduire que la suite $(n_j q_j)_{j \geq 1}$ converge.
- 4) On suppose qu'il existe un entier $c \geq 1$ tel que $cn_j q_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \geq 1$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $F(X) = X^d$.
- 5) En utilisant le résultat établi dans la question II.A.2), montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $F \in \mathbb{Q}(\zeta_p)(X)$.
- 6) Soit $N \geq 1$ un entier, $q \in \mathbb{Q}$ et notons $\zeta = \exp(2i\pi q)$. On suppose que $\zeta \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$. On écrit $q = u/v$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et $v \neq 0$. Soit ℓ le PPCM de v et N .
 a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\zeta_\ell = \zeta^a \cdot \zeta_N^b$.
 b) En utilisant le théorème admis, montrer que $\varphi(\ell) \leq \varphi(N)$, puis que $\ell \mid 2N$ et que $2Nq \in \mathbb{Z}$.
- 7) Montrer qu'il existe un entier $c \geq 1$ tel que $cn_j q_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \geq 1$ et qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $F(X) = X^d$.
- 8) Décrire les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)) \subset \Lambda$.

III. Intersections atypiques : le cas transcendant

A. Courbes et fonctions transcendentes

Un intervalle I de \mathbb{R} sera appelé non trivial si I est non vide et non réduit à un point. Si I est un intervalle non trivial et si $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, on dit :

- (i) que f est plate en un point $x \in I$ si $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire si toutes les dérivées successives de f s'annulent en x
 (ii) que f est transcendante si pour tout $d \geq 1$ et tous polynômes $P_0, \dots, P_d \in \mathbb{R}[X]$, non tous nuls, la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^d P_i(x) f(x)^i$ n'est plate en aucun point de I .

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge pour tout réel x . On note $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$. On admet qu'alors la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ et que si f est plate en 0 alors $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

- 1) Soit $n \geq 1$ un entier, $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ des réels et $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{i=1}^n P_i(x) e^{\alpha_i x}$.
 a) En calculant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^N e^{ax}}$ pour $N \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$ convenables, montrer que f n'est pas identiquement nulle.
 b) En déduire que f n'est plate en aucun $x \in \mathbb{R}$. On pourra commencer par traiter le cas $x = 0$.
- 2) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont non nuls, alors pour tout intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$ la fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = P(x) \exp(\alpha x)$ est transcendante.

B. Une inégalité

On fixe un segment non trivial $I \subset \mathbb{R}$, un entier $n \geq 2$ et des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Pour $x_1, \dots, x_n \in I$ on note

$$A(x_1, \dots, x_n) = (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R}).$$

On se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3. Il existe $c_2 > 0$ tel que pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ deux à deux distincts, on a

$$|\det A(x_1, \dots, x_n)| \leq c_2 \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i|.$$

Dans les deux questions suivantes on fixe $x_1, \dots, x_n \in I$ deux à deux distincts et on note

$$\beta = \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) = (x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

- 1) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
 a) Montrer que si $f(x_1) = \dots = f(x_{n-1}) = 0$ alors il existe $y \in I$ tel que $f(x_n) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} \beta$. On pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = \beta f(x) - \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i) f(x_n)$.
 b) En déduire qu'il existe $y \in I$ tel que $f(x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \prod_{j=1, j \neq i}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_i - x_j} = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} \beta$.
- 2) Montrer qu'il existe $(y_1, \dots, y_n) \in I^n$ tel que

$$\det A(x_1, \dots, x_n) = \frac{\beta}{(n-1)!} \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_{n-1}) & f_1^{(n-1)}(y_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_{n-1}) & f_n^{(n-1)}(y_n) \end{pmatrix}.$$

- 3) Conclure la preuve du théorème 3.

Le lemme précédent est un des ingrédients du théorème suivant, portant sur une fonction transcendante f de classe \mathcal{C}^∞ sur un segment I .

Théorème 4. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un réel $c_3 > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ on a $|\Gamma(f) \cap \frac{1}{n} \mathbb{Z}^2| \leq c_3 n^\epsilon$.