DM n°29

Exercice 1. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
On dit qu'une suite $\Phi = (\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est orthonormale si elle vérifie

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \langle \Phi_m, \Phi_n\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $V_\Phi^n = \mathrm{Vect}(\Phi_k)_{k\leqslant n}$, $V_\Phi = \mathrm{Vect}(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, P_Φ^n la projection orthogonale de E sur V_Φ^n et $d_\Phi^n(f)$ la distance de $f \in E$ à V_Φ^n.
On pose $C_0 = \tilde{1}$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n : x \mapsto \sqrt{2}\cos(n\pi x)$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n : x \mapsto \sqrt{2}\sin\big((n+1)\pi x\big)$.

I. Généralités sur les suites orthonormales.

1) Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.

De même, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale. Résultat que l'on pourra admettre dans la suite.

2) Soit Φ une suite orthonormale de E, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$.

a) Montrer que $\|f\|^2 = \|P_\Phi^n(f)\|^2 + d_\Phi^n(f)^2$.

b) Calculer $\displaystyle\sup_{f\in E,\, \|f\|=1} \|P_\Phi^n(f)\|$.

c) Expliciter $P_\Phi^n(f)$ dans la base $(\Phi_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$. En déduire que $\sum\langle f, \Phi_k\rangle^2$ converge et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \langle f, \Phi_k\rangle^2 \leqslant \|f\|^2.$$

d) Pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, exprimer $\langle f, C_n\rangle$ en fonction de $\langle f', S_{n-1}\rangle$. En déduire que $\sum n^2\langle f, C_n\rangle^2$ converge.

3) ★ Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Vect}(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $f \in E$. Montrer que si $\|f - f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\|f - P_\Phi^n(f)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En déduire que V_Φ est dense dans E si et seulement si $\forall f \in E$, $\|f - P_\Phi^n(f)\| \to 0$.

II. Suite orthonormale de polynômes de degrés échelonnés.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$, $P_n = U_n^{(n)}$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!}P_n$, le n-ième polynôme de Legendre. On admet que $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} \text{ si } n = m \end{cases}$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite de réels strictement positifs $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les $Q_n = \alpha_n L_n(2x-1)$ forment une famille orthonormale de E. Préciser la valeur de α_n. On note $Q = (Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette famille orthonormale.

b) Montrer que si $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale de E telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ_n soit polynomiale, de degré n, alors $\forall n$, $\Phi_n = \pm Q_n$.

2) Expression à l'aide de déterminants.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \langle X^k, 1\rangle$, et on considère les matrices et déterminants de taille $n+1$

$$A = \big(\langle X^{i-1}, X^{j-1}\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad P_n(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \dots & a_{2n-2} & a_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

a) Soit $\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j A_j = \vec{0}$ une relation de liaison sur les colonnes de A. Montrer que le polynôme $P = \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j X^{j-1}$ vérifie $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\langle P, X^{i-1}\rangle = 0$, puis que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

b) En comparant les coefficients de A et de Δ_n, montrer que $\Delta_n \neq 0$.

c) Montrer que $x \mapsto P_n(x)$ est une fonction polynomiale. Préciser son degré. On notera $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme associé.

d) ★ Montrer que pour $k < n$, $\langle P_n, X^k\rangle = 0$, et en déduire qu'il existe des coefficients $c_n \in \mathbb{R}^*$ tels que $\forall n$, $c_n P_n = Q_n$.

Exercice 2. ★ Théorème de Müntz-Szász. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]}|f|$.
Pour $\alpha \geqslant 0$, on note $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$. On considère une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive strictement croissante, et on note $W_n = \mathrm{Vect}(\varphi_{\alpha_0},\dots,\varphi_{\alpha_n})$.
On note $d_2(g,W_n) = \inf\{\|g-f\|_2\,,\ f\in W_n\}$ et $d_\infty(g,W_n) = \inf\{\|g-f\|_\infty\,,\ f\in W_n\}$.
L'objectif est d'étudier les conditions

$$(*_2) : \forall g\in E,\ d_2(g,W_n)\to 0 \quad \text{et} \quad (*_\infty) : \forall g\in E,\ d_\infty(g,W_n)\to 0.$$

I. 1) Donner une interprétation du fait que pour tout $g\in E$, $d_\infty(g,\mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On admet ce résultat (théorème d'approximation de Weierstrass). En déduire que pour tout $g\in E$, $d_2(g,\mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Montrer que $(*_2)$ est vérifiée si et seulement si $\forall m\in\mathbb{N}$, $d_2(\varphi_m,W_n)\to 0$.

On admet que

$$(*) : \quad d_2(\varphi_m,W_n) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}}\prod_{i=0}^{n}\frac{|\alpha_i-m|}{\alpha_i+m+1}.$$

3) Pour $m\in\mathbb{N}$, montrer que $\frac{|\alpha_i-m|}{\alpha_i+m+1} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 1$ si et seulement si $\alpha_i\to+\infty$.

4) En déduire que $(*_2)$ est équivalent à ce que $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

II. 1) Montrer que $(*_\infty)$ implique $\alpha_0 = 0$.

2) Soit $f,g\in\mathcal{C}^1([0,1])$ vérifiant $f(0)=g(0)=0$. Montrer que $\|f-g\|_\infty \leqslant \|f'-g'\|_2$.

3) On suppose que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1\geqslant 1$ et $\sum\frac{1}{\alpha_n}$ diverge. Montrer $(*_\infty)$.

III. On souhaite démontrer $(*)$.

1) Déterminants de Gram et distance à un sous-espace vectoriel.
Pour $x_1,\dots,x_n\in E$, on note $G(x_1,\dots,x_n) = (\langle x_i,x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de Gram.

a) Montrer que $\det G(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ si et seulement si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre.

b) Montrer que, si $(e_1,\dots,e_n)$ est libre,

$$d(u,Vect(e_1,\dots,e_n))^2 = \frac{\det G(u,e_1,\dots,e_n)}{\det G(e_1,\dots,e_n)}.$$

2) Déterminants de Cauchy.
Soit $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des complexes, tels que $\forall i,j,\ \alpha_i+\beta_j\neq 0$, et $C = \left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
En procédant par récurrence sur n, et en considérant le déterminant comme une fraction rationnelle en β_n, montrer que

$$\det C = \frac{\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod_{i,j}(\alpha_i+\beta_j)}.$$

3) En déduire la relation $(*)$.

Indications Exercice 1.

I. 2) a) C'est une application du théorème de Pythagore. Cf le cours.

3) Passer par une définition avec ε.

II. 2) d) Développer sur la dernière ligne.

Indications Exercice 2.

III. 1) a) Une relation de liaison sur les colonnes peut se traduire par le fait qu'un vecteur est orthogonal à tous les x_i.

b) On a $d(u,\mathrm{Vect}(e_i))^2 = \|u-p(u)\|^2$, et $p(u)$ est une combinaison linéaire des e_i.