DM n°30

Non facultatif : I)1)a), b)i), b)ii), 2)a) et II)1), II)2)a).

Exercice 1. ★ Inégalité de Carleman. On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $(\prod_{k=1}^n a_k)^{1/n}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$

On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux si pour tout $M \geqslant 0$, la restriction de f à $[0, M]$ est continue par morceaux.

On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et à valeurs positives est intégrable, ou que son intégrale converge, si la fonction $g\colon x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand $x \to +\infty$. On note alors $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.

I. Inégalité de Knopp

Dans cette partie, on démontre l'inégalité de Knopp, souvent présentée comme analogue continu de l'inégalité de Carleman (on justifie cette appellation en fin de partie).

1) Deux inégalités intégrales

a) Inégalité intégrale de Jensen

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

i) Montrer que $U\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne, donc continue.

ii) Soit φ une fonction continue et convexe sur un segment J contenant $f([a,b])$. Démontrer que $\varphi\circ f$ est continue par morceaux et rappeler brièvement pourquoi $\displaystyle\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\circ f(t)\,\mathrm{d}t.$

b) Une autre inégalité intégrale

Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, strictement positive et intégrable.

Pour tout $x>0$ on pose $\displaystyle g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$

i) Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

ii) Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

On pourra considérer $\varepsilon > 0$ et justifier l'existence d'un indice x_0 tel que $\int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$.

iii) En déduire que, quand $a \to 0$ et $b \to +\infty$, la quantité $H_{a,b} = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On pourra utiliser des intégrations par parties.

2) Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue par morceaux, strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a) Expliquer pourquoi il est possible que la fonction $\ln\circ f$ ne soit pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Dans la suite, on travaille sous l'hypothèse que $\ln\circ f$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

b) Démontrer que, pour tout $0 < y < x$,

$$\exp\Big(\frac{1}{x-y}\int_y^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\Big) \leqslant \exp\Big(\frac{1}{x-y}\int_y^x -\ln t\,\mathrm{d}t\Big)\frac{1}{x-y}\int_y^x tf(t)\,\mathrm{d}t,$$

et en déduire que $\displaystyle\exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\Big) \leqslant \frac{e}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$

La positivité du terme de gauche, et la sous partie précédente appliquée au terme de droite permettraient donner un sens à la quantité $\int_0^{+\infty}\exp\big(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\big)\,\mathrm{d}x$ et d'obtenir l'inégalité

$$\int_0^{+\infty}\exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x \leqslant e\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

que l'on admet dans la suite.

3) Application à l'inégalité de Carleman

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

a) Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie ci-dessous sur $[k-1,k]$ est minimale pour $x = k$:

$$v_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{k-1}\ln(a_i) + \frac{x-k+1}{x}\ln(a_k) & \text{si } k \geqslant 2\\ \ln(a_1) & \text{si } k = 1\end{cases}$$

b) Démontrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{k-1}^k \exp\Big(\frac{1}{x}\int_0^x \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x \geqslant \exp\Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\ln(a_i)\Big).$

On pourra utiliser la question précédente et admettre l'existence de cette quantité quand $k = 1$.

c) En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

d) Expliquer comment on peut retirer l'hypothèse de décroissance.

II. Inégalité de Carleman

On démontre dans cette partie l'inégalité de Carleman d'une manière indépendante de la partie précédente.

La première sous-partie établit l'inégalité arithmético-géométrique avec des méthodes de calcul différentiel qui permettent de se familiariser avec celles qui seront utilisées dans la seconde sous-partie pour démontrer l'inégalité de Carleman.

Soit n dans $\mathbb{N}$. On note U_n l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^n$. Son adhérence, notée $\overline{U_n}$ est $(\mathbb{R}_+)^n$.

1) Inégalité arithmético-géométrique

Soit $s > 0$. On définit les fonctions f et g_s sur $\overline{U_n}$ en posant, pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \overline{U_n}$

$$f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k \quad \text{et} \quad g_s(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) - s.$$

On note X_s le sous-ensemble de U_n constitué des zéros de g_s : $X_s = \{x \in \overline{U_n} \mid g_s(x) = 0\}$

a) Justifier que f et g_s sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n. Donner l'expression de leur gradient en un point $x = (x_1, ..., x_n)$ de U_n

b) Démontrer que la restriction de f à X_s admet un maximum sur X_s et que ce maximum est en fait atteint sur $X_s \cap U_n$

On pourra vérifier que f est strictement positive en certains points de $X_s \cap U_n$

c) On note $a = (a_1, ..., a_n)$ un élément de $X_s \cap U_n$ en lequel la restriction de f à X_s atteint son maximum.

d) On admet que la condition d'extremum implique que $\operatorname{grad} f(a)$ soit colinéaire à $\operatorname{grad} g_s(a)$ (cf II.2)c) pour une démonstration).

Vérifier alors qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $a_k = \frac{f(a)}{\lambda}$.

e) Démontrer alors que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in U_n \cap X_s$, $\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique : $\quad \forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$

2) Démonstration de l'inégalité de Carleman

On considère l'application F_n de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \overline{U_n}, \quad F_n(x_1, ..., x_n) = x_1 + (x_1x_2)^{1/2} + (x_1x_2x_3)^{1/3} + \cdots + (x_1 \cdots x_n)^{1/n}.$$

On note h_n l'application de $\overline{U_n}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\quad \forall (x_1, ..., x_n) \in \overline{U_n}, \quad h_n(x_1, ..., x_n) = x_1 + \cdots + x_n - 1.$

On admet que F_n et h_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U_n. On note $H_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

a) Déterminer le gradient de F_n et le gradient de h_n en tout point de U_n

b) Démontrer que la restriction de F_n à $\overline{U_n} \cap H_n$ admet un maximum.

On note M_n le maximum de F_n sur $\overline{U_n} \cap H_n$ et on note $a = (a_1, ..., a_n)$ un point en lequel il est atteint.

c) On suppose que $a \in U_n \cap H_n$. Soit $h = (h_1, \ldots, h_n)$ tel que $\sum h_i = 0$. Justifier qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $\forall t \in V$, $a + th \in H_n$. En déduire que $h \perp \operatorname{grad} f(a)$.

d) En raisonnant par l'absurde et en adaptant le raisonnement précédent, montrer qu'il n'est pas possible que $a \notin U_n \cap H_n$.

e) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\gamma_k = (a_1a_2 \cdots a_k)^{1/k}$. Déduire de II.2)c) qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\begin{cases} \gamma_1 + \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \dfrac{\gamma_2}{2} + \cdots + \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \qquad \cdots \\ \dfrac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \end{cases}$$

f) En déduire que $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = M_n$; et que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\gamma_k = \lambda \omega_k a_k$ où $\begin{cases} \omega_k = k(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}) \text{ si } k \in [\![1, n-1]\!] \\ \omega_n = n \end{cases}$

L'objectif des trois questions suivantes est de démontrer que $\lambda \leqslant e$. On suppose par l'absurde que $\lambda > e$.

g) Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\frac{1}{e} \leqslant (\frac{k+1}{k+2})^{k+1}$.

h) Démontrer que $\omega_1 \leqslant \frac{1}{e}$ et que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\omega_k \leqslant \frac{k}{k+1}$.

On pourra démontrer, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ que $\omega_{k+1}^{k+1} = \frac{1}{\lambda}\omega_k^k(1 - \frac{\omega_k}{k})^{-k}$.

i) Aboutir à une contradiction sur ω_n. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ pour tout $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$, on a $\quad \sum_{k=1}^{n} (x_1x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leqslant e.$

j) En déduire l'inégalité de Carleman.