DM n°31

Facultatif.

Exercice 1. ★ Théorème de Perron-Frobenius par la méthode du point fixe de Brouwer. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et on note S le cercle unité et D le disque unité.

Si D_1, D_2 sont des parties de $\mathbb{R}^2$, une application $\varphi\colon D_1 \to D_2$ est dite continue sur $\forall a \in D_1, \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, $\|x - a\| \leqslant \delta \Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(a)\| \leqslant \varepsilon$.

On admettra que toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Un homéomorphisme est une bijection φ bicontinue, c'est-à-dire telle que φ et φ^{-1} sont continues.

On admettra que toute application continue d'un compact sur un compact est un homéomorphisme.

I. Lemme de Sperner et théorème de Brouwer en dimension deux.

1) Soit $\mathcal{T}$ un triangle équilatéral dans le plan euclidien, de sommets A, B, C. Soit $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des points qui s'écrivent comme barycentre à coefficients entiers $\frac{pA+qB+rC}{p+q+r}$ avec $p, q, r \in \mathbb{N}$ et $p + q + r = n$. Autrement dit, on divise le triangle $\mathcal{T}$ en n^2 triangles élémentaires équilatéraux de côté $\frac{1}{n}$ homothétiques avec $\mathcal{T}$.

À chaque point de $\mathcal{A}$, on associe une «couleur» appartenant à $\{a, b, c\}$ de sorte que tout point du segment $[AB]$ a la couleur a ou b, et de même pour $[BC]$ et $[AC]$. En particulier, A est de couleur a, et de même pour B et C.

Démontrer le lemme de Sperner : il existe un triangle élémentaire dont les sommets portent les couleurs a, b, c.

2) **a)** Démontrer qu'il n'existe pas d'application continue de $\mathcal{T}$ sur le bord $\partial\mathcal{T}$ du triangle, qui laisse fixe $\partial\mathcal{T}$, c'est-à-dire $\forall x \in \partial\mathcal{T}$, $f(x) = x$.

b) Montrer que T homéomorphe au disque unité D de $\mathbb{R}^2$, en explicitant (géométriquement) un homéomorphisme φ.

c) Démontrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f\colon D \to S$ laissant S fixe.

d) En déduire le théorème de Brouwer : Toute fonction continue $f\colon D \to D$ admet au moins un point fixe.

Il en est de même de toute fonction continue $f\colon K \to K$, où K est homéomorphe à D.

II. Théorème de Perron-Frobenius.

1) On note $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \text{ et } x + y + z = 1\}$. Préciser la nature géométrique de $\mathcal{T}$.

2) Démontrer le théorème de Perron-Frobenius : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls, il existe $X \in \mathbb{R}^3$ non nul, à coordonnées positives tel que $AX = \lambda X$, où $\lambda \geqslant 0$.

III. Complément : Une autre preuve du théorème de Brouwer.

1) Soit $\gamma\colon [0, 1] \to S$ un chemin fermé continu sur S.

On considère un relèvement continu $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ de γ, c'est-à-dire vérifiant $\forall t$, $\gamma(t) = \exp(i\varphi(t))$. Montrer que $\varphi(1) - \varphi(0)$ est indépendant du choix de φ et est de la forme $2\pi m$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

L'entier m est appelé indice de γ sur S.

2) On dit que deux chemins continus $\gamma_0\colon [0, 1] \to S$ et $\gamma_1\colon [0, 1] \to S$ sont homotopes ssi il existe une application continue $\gamma\colon [0, 1] \times [0, 1] \to S \quad (r, t) \mapsto \gamma_r(t)$ représentant une famille continue de chemins fermés sur S.

Montrer que deux chemins de S homotopes et de classe C^1 ont même indice.

On admettra dans la suite que la propriété est vraie pour tous les chemins continus homotopes.

En fait, c'est une caractérisation : deux chemins continus sont homotopes ssi ils ont le même indice.

3) Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'application continue de D sur S laissant S invariant point par point.