



## II. Composantes connexes de $\mathcal{Z}(f)$ .

Pour  $f \in \mathbb{R}[X, Y]$  non nul de degré au plus  $d$ . On note  $\mathcal{Z}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ .

- 1) Montrer que  $\mathcal{Z}(f) \neq \mathbb{R}^2$ .
- 2) Soit  $\ell$  une droite de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que soit  $\ell \subset \mathcal{Z}(f)$ , soit l'intersection  $\ell \cap \mathcal{Z}(f)$  contient au plus  $d$  points.
- 3) Montrer que  $\mathcal{Z}(f)$  contient au plus  $d$  droites distinctes.

On admet que l'ensemble  $\mathcal{Z}(f)$  s'écrit naturellement comme une réunion disjointe (pas forcément finie) de «composantes connexes». Ces composantes connexes vérifient en particulier :

- (i) chaque composante connexe est fermée.
  - (ii) deux points  $p, p'$  de  $\mathcal{Z}(f)$  sont dans la même composante connexe si et seulement si il existe un arc continu  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{Z}(f)$  tel que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(1) = p'$ .
- 4) On suppose dans cette question que  $f$  est sans facteur carré, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme non constant  $P$  tel que  $P^2 \mid f$ .
- On s'intéresse aux composantes connexes de  $\mathcal{Z}(f)$ .
- a) Si  $\mathcal{C}$  est une composante connexe bornée de  $\mathcal{Z}(f)$ , montrer qu'il existe  $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$  tel que  $x_0 = \sup\{x, (x, y) \in \mathcal{C}\}$ .
  - b) On souhaite montrer que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ . On procède par l'absurde, et on suppose que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) > 0$ 
    - i) Montrer qu'il existe un petit rectangle  $R = [a, a + \delta] \times [b - \varepsilon, b + \varepsilon]$  tel que pour chaque  $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ , il existe un unique  $y(x) \in ]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$  tel que  $f(x, y(x)) = 0$ .
    - ii) On admet que  $x \mapsto y(x)$  est continue. Conclure.
  - c) Justifier que  $f \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 1$  (considérer un facteur commun irréductible) et en déduire que le nombre de composantes connexes bornées est d'au plus  $d(d-1)$ .
  - d) Soit  $C$  une composante connexe non bornée de  $\mathcal{Z}(f)$ .
    - i) Soit  $R > 0$ . On considère le cercle  $\mathcal{C}_R$  d'équation  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ . On suppose que ce cercle n'est pas inclus dans  $\mathcal{Z}(f)$ . Montrer que  $|\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{C}_R| \leq 2d$ .
    - ii) En déduire que  $\mathcal{Z}(f)$  possède au plus  $2d$  composantes connexes non bornées.

On a donc montré que le nombre total de composantes connexes de  $\mathcal{Z}(f)$  est  $\leq d(d+1)$ .

## III. Partitions polynomiales

### 1) Théorème du sandwich au jambon polynomial

Si  $A \subset \mathbb{R}^d$  est une partie finie, on dit qu'un hyperplan affine bisecte  $A$  si chacun des deux demi-espaces ouverts qu'il délimite contient au plus  $\lfloor |A|/2 \rfloor$  points de  $A$ .

On admet la version discrète suivante du théorème du sandwich au jambon (cf DM suivant) :

Toute famille de  $d$  parties finies  $A_1, \dots, A_d$  de  $\mathbb{R}^d$  peut être simultanément bisectée par un hyperplan affine.

Soient  $A_1, \dots, A_s \subset \mathbb{R}^2$  des ensembles finis et  $d \in \mathbb{N}^*$  un entier tel que  $\binom{d+2}{2} - 1 \geq s$ .

- a) Soit  $k = \binom{d+2}{2} - 1$ . On considère l'application  $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$  définie par  $\Phi(x, y) = (x^i y^j)_{1 \leq i+j \leq d}$ . Montrer que l'image réciproque d'un hyperplan affine de  $\mathbb{R}^k$  par  $\Phi$  correspond à l'ensemble des zéros d'un polynôme de  $\mathbb{R}[x, y]$  de degré au plus  $d$ .
  - b) En déduire qu'il existe un polynôme non nul  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  de degré au plus  $d$  qui bisecte simultanément les ensembles  $A_1, \dots, A_s$ .
- ### 2) Partitions polynomiales

Soit  $P \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble fini de  $n$  points, et  $r > 1$  un réel. On souhaite construire un polynôme  $f$  dit « $r$ -partitionnant», tel qu'aucune composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Z}(f)$  ne contienne plus de  $n/r$  points de  $P$ .

Pour cela, on construit par récurrence des familles  $\mathcal{P}_j$  de parties disjointes de  $P$ . On pose  $\mathcal{P}_0 = \{P\}$ .

- a) Supposons  $\mathcal{P}_j$  construite, contenant au plus  $2^j$  sous-ensembles de taille au plus  $n/2^j$ . Montrer qu'il existe un entier  $d_j \leq \sqrt{2 \cdot 2^j}$  et un polynôme  $f_{j+1}$  de degré au plus  $d_j$  qui bisecte chacun des ensembles de  $\mathcal{P}_j$ .

Pour chaque  $Q \in \mathcal{P}_j$ , on note  $Q^+ = \{q \in Q \mid f_{j+1}(q) > 0\}$  et  $Q^- = \{q \in Q \mid f_{j+1}(q) < 0\}$  et on pose  $\mathcal{P}_{j+1} = \bigcup_{Q \in \mathcal{P}_j} \{Q^+, Q^-\}$ .

On s'arrête à l'étape  $t = \lceil \log_2 r \rceil$  et on pose  $f = f_1 f_2 \cdots f_t$ .

- b) Montrer que  $f$  est un polynôme  $r$ -partitionnant pour  $P$  et qu'il existe  $c > 0$  telle que  $\deg(f) \leq c\sqrt{r}$ .

#### IV. Application au théorème d'incidence de Szemerédi-Trotter.

Soient  $P$  un ensemble de  $m$  points et  $L$  un ensemble de  $n$  droites dans  $\mathbb{R}^2$ . On note  $I(P, L)$  le nombre d'incidences, c'est-à-dire le nombre de paires  $(p, \ell) \in P \times L$  telles que  $p \in \ell$ .

- 1) Montrer que  $I(P, L) \leq n + m^2$ .

Indication : Séparer  $L$  en deux sous-ensembles : les droites contenant au plus un point de  $P$ , et celles en contenant au moins deux.

- 2) On suppose dans cette question que  $m = n$ . On choisit  $r = n^{2/3}$  et on considère un polynôme  $r$ -partitionnant pour  $P$ , noté  $f$ . On note  $d = \deg(f) = O(\sqrt{r}) = O(n^{1/3})$ . On note  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(f)$ , et  $C_1, \dots, C_s$  les composantes connexes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Z}$ . On pose  $P_0 = P \cap \mathcal{Z}$  et  $P_i = P \cap C_i$ .

On note  $L_0$  l'ensemble des droites de  $L$  entièrement incluses dans  $\mathcal{Z}$  et  $L_i$  l'ensemble des droites de  $L$  qui intersectent la composante  $C_i$ .

- a) Montrer que  $I(P_0, L_0) = O(n^{4/3})$ .
  - b) Pour  $\ell \in L \setminus L_0$ , montrer que  $I(P_0, L \setminus L_0) \leq nd = O(n^{4/3})$ .
  - c) Justifier que  $I(P_i, L_i) \leq |L_i| + |P_i|^2$ .
  - d) Montrer que  $\sum_{i=1}^s |L_i| \leq n(d+1) = O(n^{4/3})$ .
  - e) Montrer que  $I(P, L) = O(n^{4/3})$ .
- 3) On revient au cas général avec  $m$  points et  $n$  droites.

On admet que dans le cas où  $\sqrt{n} \leq m \leq n$ , en appliquant la méthode de la question précédente avec  $r = m^{4/3}n^{-2/3}$ , on obtient  $I(P, L) = O(m^{2/3}n^{2/3})$ . Conclure que si  $m \leq n$  on a  $I(P, L) = O(m^{2/3}n^{2/3} + n)$ .

Le cas  $m > n$  peut se ramener au cas inverse via le principe de dualité suivant :

Quitte à appliquer une rotation générique, on peut supposer qu'aucune des droites n'est verticale.

On associe à tout point  $p = (a, b)$  une droite  $p^*$  et à toute droite  $\ell : y = cx - d$  un point  $\ell^*$  de la manière suivante :

$$p = (a, b) \longleftrightarrow p^* : y = ax - b \quad \text{et} \quad \ell : y = cx - d \longleftrightarrow \ell^* = (c, d).$$

On peut vérifier que cette association préserve le nombre de points d'incidence de la configuration.

On a finalement montré que dans tous les cas  $I(P, L) = O(m^{2/3}n^{2/3} + n + m)$

#### V. Le problème des distances unitaires d'Erdős.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étant donné un ensemble  $\mathcal{P}$  de  $n$  points distincts dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , on note  $d_n(\mathcal{P})$  le nombre de paires de points de  $\mathcal{P}$  à une distance 1 l'un de l'autre.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on cherche à maximiser la quantité  $d_n(\mathcal{P})$ . On notera  $d_n = \sup_{\mathcal{P}} d_n(\mathcal{P})$ .

- 1) Majoration.

On admet que le théorème d'incidence de Szemerédi-Trotter est toujours valable si l'on remplace les droites par des «courbes définies par des équations algébriques» qui vérifient :

- (i) le nombre de points d'intersection de deux courbes distinctes de la famille est majoré par une constante absolue  $\alpha$ .
- (ii) Le nombre de courbes de la famille pouvant passer par deux points distincts du plan est majoré par une constante absolue  $\beta$ .

En déduire que  $d_n = O(n^{4/3})$ .

- 2) Minoration.

- a) Montrer que  $n = O(d_n)$ .
- b) Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $r_2(m)$  le nombre de façons d'écrire  $m$  comme sommes de deux carrés d'entiers. On admet qu'il existe une constante  $C > 0$  et des entiers  $m$  arbitrairement grand pour lesquels  $r_2(m) \geq m^{\frac{C}{\ln m}}$ . En déduire qu'il existe  $C > 0$ , des entiers  $n$  arbitrairement grand et des configurations  $\mathcal{P}_n$  de  $n$  points telles que  $d(\mathcal{P}_n) \geq n^{1+\frac{C}{\ln n}}$ .

La majoration présentée ici en  $n^{4/3}$  est la meilleure connue. La minoration présentée ici est due à Erdős en 1946, et elle était conjecturée comme optimale jusqu'en 2026.

Une meilleure minoration en  $O(n^{1+\delta})$  a été trouvée et démontrée par LLM interne d'OpenAI en mai 2026.

C'est historiquement le premier problème ouvert de recherche célèbre résolu par intelligence artificielle.