DM n°33

Facultatif : À partir de la deuxième page. Les partie I)3) et question II)1)c) sont un peu plus dures. À rendre vendredi prochain, ou le lundi suivant si l'exercice 2 est abordé.

Exercice 1.

On rappelle que si $F \subset \mathbb{R}^n$ est un fermé borné et $f\colon F \to \mathbb{R}$ est continue, alors f admet un minimum sur F, c'est-à-dire qu'il existe $x \in F$ tel que $f(x) \leqslant f(y)$ pour tout $y \in F$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que $C \subset E$ est un ensemble convexe si pour tous $x, y \in C$ et tout $t \in [0,1]$ on a $(1-t)x + ty \in C$.

Pour $C \subset E$ convexe, une fonction $f\colon C \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si pour tous x, y éléments de C et tout $t \in [0,1]$, on a $f((1-t)x+ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$. On dit que f est strictement convexe si cette inégalité est stricte pour $t \in]0,1[$ et $x \neq y$.

Soient A et B deux ensembles et $f\colon A \times B \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un point selle en $(a_*, b_*) \in A \times B$ si pour tout $(a,b) \in A \times B$ on a

$$f(a_*, b) \leqslant f(a_*, b_*) \leqslant f(a, b_*).$$

I. Convexité et points selles.

Soient m et n deux entiers positifs non nuls et E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Soient $C \subset E$ un ensemble convexe. Soient f et g deux fonctions convexes de C dans $\mathbb{R}$.

- **a)** Montrer que $f+g$ est convexe, et strictement convexe s'il l'une des deux fonctions f ou g est strictement convexe.
- **b)** On suppose f strictement convexe. Vérifier que le minimum éventuel de f est atteint sur C en au plus un point de C.

2) Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice de m lignes et n colonnes. On note $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^n}$ le produit scalaire entre deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \mu, \nu\rangle_{\mathbb{R}^m}$ celui entre deux vecteurs μ et ν de $\mathbb{R}^m$.

- **a)** Montrer que pour tout $(x, \nu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, on a $\langle Ax, \nu\rangle_{\mathbb{R}^m} = \left\langle x, A^T\nu\right\rangle_{\mathbb{R}^n}$.
- **b)** En déduire que $\ker A \subset \left(\operatorname{Im} A^T\right)^{\perp}$.
- **c)** Montrer que $\ker A = \left(\operatorname{Im} A^T\right)^{\perp}$

3) On considère un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n, h\colon U \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^1$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On suppose qu'il existe $x_* \in U$ un minimum de h sur l'ensemble $V_b = \{x \in U \mid Ax + b = 0\}$.

- **a)** Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au = 0$ on a $\langle \nabla h(x_*), u\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$.
  Indication : *Introduire une fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, construite à partir de f et de u.*
- **b)** Montrer l'existence de $\nu_* \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla h(x_*) - A^T\nu_* = 0$.
- **c)** En déduire que l'application $L\colon U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ telle que $L(x,\nu) = h(x) - \langle \nu, Ax + b\rangle_{\mathbb{R}^m}$ vérifie $\frac{\partial L}{\partial x_k}(x_*, \nu_*) = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.
- **d)** Conclure que si U est convexe, et h convexe sur U, alors L admet un point selle en (x_*, ν_*), c'est-à-dire que l'on a
$$L(x_*, \nu) \leqslant L(x_*, \nu_*) \leqslant L(x, \nu_*)$$
pour tout $(x, \nu) \in U \times \mathbb{R}^m$.

II. Entropie et codage.

Soient $\mathcal{X}$ un ensemble fini et $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}_x)_{x\in\mathcal{X}}$ une loi de probabilité sur $\mathcal{X}$. On suppose que $\boldsymbol{p}$ charge tous les points de $\mathcal{X}$: $\boldsymbol{p}_x > 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$. On appelle entropie de $\boldsymbol{p}$ la quantité

$$H(\boldsymbol{p}) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} \boldsymbol{p}_x \ln(\boldsymbol{p}_x)$$

On considère l'ensemble $Q_{\mathcal{X}} = \left\{\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_x)_{x\in\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}} \mid \forall x \in \mathcal{X}, \boldsymbol{q}_x \geqslant 0\right\}$. Pour tous $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \in Q_{\mathcal{X}}$ tels que $\boldsymbol{q}'_x > 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}$, on définit

$$\mathrm{KL}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}') = \sum_{x\in\mathcal{X}} \varphi(\boldsymbol{q}_x/\boldsymbol{q}'_x)\, \boldsymbol{q}'_x$$

avec $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x\ln(x) - x + 1$ pour $x > 0$ et prolongée en 0 par continuité.

1)

- **a)** Préciser $\varphi(0)$.
- **b)** Vérifier que φ est continue strictement convexe positive et que $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$.
- **c)** Montrer que $Q_{\mathcal{X}}$ est convexe et que $\boldsymbol{q} \mapsto \mathrm{KL}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}')$ est strictement convexe positive et s'annule ssi $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}'$.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini. On appelle mot sur $\mathcal{A}$ une suite finie d'éléments de $\mathcal{A}$, on le note $u = u_1 \dots u_n$ et n est la longueur du mot u, notée $|u|$. Le mot vide est noté ε, il est de longueur nulle. On note $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^*\backslash\{\varepsilon\}$ l'ensemble des mots privé du mot vide. On définit la concaténation $u \cdot v$ de deux mots $u, v \in \mathcal{A}^*$ par $u \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot u = u$ et $u \cdot v = u_1 \dots u_{|u|} v_1 \dots v_{|v|}$ si $u, v \in \mathcal{A}^+$. On dit que u est un préfixe de v si $v = u \cdot w$ pour $w \in \mathcal{A}^*$.

Soient $\mathcal{X}$ un ensemble fini non vide et $c\colon \mathcal{X} \to \{0,1\}^+$ une application injective. On dira que c est un code binaire sur $\mathcal{X}$. On suppose de plus que c est un code préfixe, c'est-à-dire que pour tous $x \neq y$ dans $\mathcal{X}, c(x)$ n'est pas un préfixe de $c(y)$.

2) On définit $\bar{c} \colon \mathcal{X} \to \{0,1\}^*$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}, c(x) = c(x)_1 \cdot \bar{c}(x)$ où $c(x)_1$ est le premier élément du mot $c(x)$.

- **a)** Vérifier que pour tout $x \neq y \in \mathcal{X}$, si $c(x)_1 = c(y)_1$ alors $\bar{c}(x) \neq \bar{c}(y)$ et $\bar{c}(x)$ n'est pas un préfixe de $\bar{c}(y)$.
- **b)** Pour $a \in \{0,1\}$ on note $\mathcal{X}_a = \{x \in \mathcal{X} \mid c(x)_1 = a\}$. Montrer que si $\mathcal{X}_a$ contient au moins deux éléments, alors la restriction de $\bar{c}$ à $\mathcal{X}_a$ est un code préfixe sur $\mathcal{X}_a$.
- **c)** En déduire que $\sum_{x \in \mathcal{X}^2} 2^{-|c(x)|} \leqslant 1$.
  Indication : *Décomposer la somme en une somme sur* $\mathcal{X}_0$ *et* $\mathcal{X}_1$ *et raisonner par récurrence sur* $L(c) = \max\{|c(x)| \mid x \in \mathcal{X}\}$.

3) Soient $\boldsymbol{q} = \left(2^{-|c(x)|}\right)_{x \in \mathcal{X}}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{X}$ de loi $\boldsymbol{p}$.

- **a)** Vérifier que $\ln(2)E(|c(X)|) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} \boldsymbol{p}_x \ln(\boldsymbol{q}_x)$.
- **b)** En déduire que $E(|c(X)|) \geqslant \frac{H(p)}{\ln(2)}$.
  Indication : *Chercher à exprimer* $\ln(2)E(|c(X)|)$ *en fonction de* $H(\boldsymbol{p})$ *et* $\mathrm{KL}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$.

Exercice 2. ★ Théorème de Perron-Frobenius par la méthode du point fixe de Brouwer. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et on note S le cercle unité et D le disque unité. Si D_1, D_2 sont des parties de $\mathbb{R}^2$, une application $\varphi \colon D_1 \to D_2$ est dite continue sur $\forall a \in D_1, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \|x - a\| \leqslant \delta \Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(a)\| \leqslant \varepsilon$.

On admettra que toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Un homéomorphisme est une bijection φ bicontinue, c'est-à-dire telle que φ et φ^{-1} sont continues.

On admettra que toute application continue d'un compact sur un compact est un homéomorphisme.

I. Lemme de Sperner et théorème de Brouwer en dimension deux.

1) Soit $\mathcal{T}$ un triangle équilatéral dans le plan euclidien, de sommets A, B, C. Soit $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des points qui s'écrivent comme barycentre à coefficients entiers $\frac{pA+qB+rC}{p+q+r}$ avec $p, q, r \in \mathbb{N}$ et $p + q + r = n$. Autrement dit, on divise le triangle $\mathcal{T}$ en n^2 triangles élémentaires équilatéraux de côté $\frac{1}{n}$ homothétiques avec $\mathcal{T}$.

À chaque point de $\mathcal{A}$, on associe une «couleur» appartenant à $\{a, b, c\}$ de sorte que tout point du segment $[AB]$ a la couleur a ou b, et de même pour $[BC]$ et $[AC]$. En particulier, A est de couleur a, et de même pour B et C.

Démontrer le lemme de Sperner : il existe un triangle élémentaire dont les sommets portent les couleurs a, b, c.
Indication : *Supposer par l'absurde qu'aucun triangle élémentaire ne soit tricolore. À chaque triangle élémentaire* t*, on associe le nombre* $m(t)$ *de ses arêtes bicolores. Montrer la somme des* $m(t)$ *est paire. En déduire que la somme du nombre d'arêtes bicolores du bord est paire. Conclure à une contradiction. Alternative : considérer la parité du nombre de couples (triangle élémentaire, arête bicolore de ce triangle).*

2)
- **a)** Démontrer qu'il n'existe pas d'application continue de $\mathcal{T}$ sur le bord $\partial\mathcal{T}$ du triangle, qui laisse fixe $\partial\mathcal{T}$, c'est-à-dire $\forall x \in \partial\mathcal{T}$, $f(x) = x$.
  Indication : *Supposer par l'absurde qu'il existe* $f \colon \mathcal{T} \to \partial\mathcal{T}$ *continue, laissant fixe* $\partial\mathcal{T}$*. Soit* $n \geqslant 1$*. On considère l'ensemble* $\mathcal{A}$ *défini dans le lemme. À chaque point* m *de* $\mathcal{A}$*, on associe la couleur* a *si* $f(m) \in [AB[$*, la couleur* b *si* $f(m) \in [BC[$*, et la couleur* c *si* $f(m) \in [CA[$*. Utiliser le lemme de Sperner pour obtenir une contradiction avec l'uniforme continuité de* f*.*
- **b)** Montrer que T homéomorphe au disque unité D de $\mathbb{R}^2$, en explicitant (géométriquement) un homéomorphisme φ.
- **c)** Démontrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f \colon D \to S$ laissant S fixe.
- **d)** En déduire le théorème de Brouwer : Toute fonction continue $f \colon D \to D$ admet au moins un point fixe.

Il en est de même de toute fonction continue $f \colon K \to K$*, où* K *est homéomorphe à* D*.*

II. Théorème de Perron-Frobenius.

1) On note $\mathcal{T} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \text{ et } x + y + z = 1\right\}$. Préciser la nature géométrique de $\mathcal{T}$.

2) Démontrer le théorème de Perron-Frobenius : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls, il existe $X \in \mathbb{R}^3$ non nul, à coordonnées positives tel que $AX = \lambda X$, où $\lambda \geqslant 0$.
Indication : *On distinguera deux cas, selon que* $(\operatorname{Ker} A) \cap \mathcal{T}$ *est vide ou non vide. Dans le premier cas, définir à partir de* A *une application continue* $f \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ *à laquelle on appliquera le théorème de Brouwer.*

III. Complément : Une autre preuve du théorème de Brouwer.

1) Soit $\gamma \colon [0,1] \to S$ un chemin fermé continu sur S.

On considère un relèvement continu $\varphi \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ de γ, c'est-à-dire vérifiant $\forall t$, $\gamma(t) = \exp(i\varphi(t))$. Montrer que $\varphi(1) - \varphi(0)$ est indépendant du choix de φ et est de la forme $2\pi m$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

L'entier m est appelé indice de γ sur S.

2) On dit que deux chemins continus $\gamma_0 \colon [0,1] \to S$ et $\gamma_1 \colon [0,1] \to S$ sont homotopes ssi il existe une application continue $\gamma \colon [0,1] \times [0,1] \to S(r,t) \longmapsto \gamma_r(t)$ représentant une famille continue de chemins fermés sur S.

Montrer que deux chemins de S homotopes et de classe C^1 ont même indice.

On admettra dans la suite que la propriété est vraie pour tous les chemins continus homotopes.

En fait, c'est une caractérisation : deux chemins continus sont homotopes ssi ils ont le même indice.

3) Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'application continue de D sur S laissant S invariant point par point.