Exercices d'oraux hivernaux

Exercice 1. On note $\mathcal{S}_+$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) > 0$, et $\mathcal{S}$ ceux vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) \geqslant 0$.

1. Caractériser sans justifier les décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de $\mathcal{S}_+$.
2. Caractériser sans justifier les décompositions en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de $\mathcal{S}$.
3. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui s'écrivent sous la forme $P = A^2 + B^2$, pour $A, B \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
   (b) Montrer que $\mathcal{U} = \mathcal{S}$.

Exercice 2. *IMT MP.* Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 3. *CCINP 2025.* Soit $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle inversible ?
2. Trouver un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire une expression polynomiale en A qui donne O_n (comme $A^2 + 3A = O_n$, par exemple).

Exercice 4. *IMT 2025.* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^e (\ln t)^n \,\mathrm{d}t$.

1. En utilisant, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \int_1^e t(\ln t)^n \,\mathrm{d}t$, montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$. En déduire un équivalent de I_n.
3. Déterminer un développement asymptotique de I_n à deux termes, c'est-à-dire de la forme $I_n = u_n + v_n + o_{+\infty}(v_n)$, où $v_n = o_{+\infty}(u_n)$ (et donc u_n est l'équivalent trouver précédemment).

Exercice 5. *IMT MP.* Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} P(t)\,\mathrm{d}t = 2n + 1$.

Exercice 6. Soit P un polynôme de degré n dont les coefficients appartiennent à $\{0, 1\}$, et α une racine complexe de P non nulle.

1. Montrer que

$$(*_1) \colon |1 + a_{n-1}\alpha^{-1}| \leqslant |\alpha|^{-2} + \cdots + |\alpha|^{-n} \quad \text{et } (*_2) \colon |1 + a_{n-1}\alpha^{-1} + a_{n-2}\alpha^{-2}| \leqslant |\alpha|^{-3} + \cdots + |\alpha|^{-n}.$$

2. Déduire de $(*_1)$ que si $\mathrm{Re}(\alpha) \geqslant 0$, $|\alpha| < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. En utilisant $(*_2)$, montrer que $\mathrm{Re}(\alpha) \leqslant 3/2$.
4. Montrer que si $P = QR$ est le produit de deux polynômes à coefficients entiers, alors $P(2)$ est un entier composé.

Exercice 7. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$. On suppose $f(0) = 0$. En revenant à la définition de la limite, montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 8. *Mines 2023.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\sqrt{k}}{n}\right)$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel $|\sin x - x| \leqslant |x|^3$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 9. Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{Z}$ deux à deux distincts. Montrer que le polynôme $P = (X - a_1)\ldots(X - a_n) - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 10. *Centrale MP 2024.* Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de A dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues de A dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $n = 1$ et A un segment, montrer que $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ si et seulement si $f \in \mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$ est stable par composition. Est-il stable par produit ?
3. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue et T-periodique. Montrer que $f \in \mathcal{UC}(A, \mathbb{R})$.

Exercice 11. Soit $f \colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a,b]$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. Puis un segment.
2. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 12. Théorème d'Erdös *X MP 2024.* Soit $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tous $m, n \geqslant 1$. On suppose f croissante. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = c \ln n$.

Exercice 13. *ENS.* Soit $f_n(x) = x(x-1)\ldots(x-n)$.

1. Montrer que le maximum de $|f_n|$ sur $[0, n]$ est atteint en un point $x_n \in [0, 1]$.
2. Montrer que $\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - x_n}$, et en déduire un équivalent de x_n.

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ii}| < 1$. Montrer que $A^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} O_n$, au sens où tous les coefficients tendent vers 0.

Exercice 15. *ENS MP 2024.* Déterminer les valeurs d'adherence des suites $(\cos n)$, $(\cos^{\circ n} n)$

Exercice 16. *X MP 2023.* Soient G un groupe et T l'ensemble des éléments de G d'ordre fini, c'est-à-dire les $t \in T$ pour lesquels il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $t^n = e_G$.

1. En considérant des matrices de la forme $T_a = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, montrer qu'en général, T n'est pas forcément un sous-groupe de G.
2. Soit S une partie finie de G stable par conjugaison munie d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Montrer que, pour tous $s_1, \ldots, s_r \in S$, il existe $s'_1, \ldots, s'_r \in S$ tels que $s'_1 \leqslant s'_2 \cdots \leqslant s'_r$ et $s_1 s_2 \cdots s_r = s'_1 s'_2 \cdots s'_r$.
3. Avec la question précédente, montrer que, si T est fini, alors T est un sous-groupe de G.

Exercice 17. Conjecture de Singmaster *ENS.* Soit $N(d)$ le nombre de couples $1 \leqslant n \leqslant m$ tel que $\binom{m}{n} = d$.

1. Montrer que $(i, j) \mapsto \binom{i+j}{j}$ est strictement croissante en i et en j.
2. En considérant $B = \min\{b \in \mathbb{N}^* \mid \binom{2b}{b} > d\}$, montrer que $N(d) = O(\ln d)$.
3. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{d=2}^{n} N(d) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$.

Indications Exercice 1.

1. Les polynômes ne doivent pas admettre de racine réelles.
2. Les polynômes ne doivent pas admettre de racine réelles de multiplicité impair.
3. (a) Revient à montrer que qu'un produit de deux entiers qui sont sommes de deux carrés est lui-même somme de deux carrés. Considérer, pour $a, b \in \mathbb{N}$, et $c, d \in \mathbb{N}$, les complexes $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, et leur produit $z_1 z_2$.
   (b) Pour l'inclusion difficile : utiliser la question précédente (et celle d'avant).

Indications Exercice 2. Commencer par factoriser ce polynôme dans $\mathbb{C}[X]$,

Indications Exercice 3.

1. Dessiner la matrice, que remarque sur ses lignes (ou ses colonnes).
2. Calculer A^2. Faire le lien avec A.

Indications Exercice 4.

2. Utiliser le fait que $I_n \to 0$.

Indications Exercice 7. Attention, la somme de n termes tendant tous vers 0 ne tend pas nécessairement vers 0. Il faut quantifier explicitement le fait que $f(x) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Indications Exercice 8.

1. Vient du $DL_3(0)$ de sin.
2. Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, par une comparaison avec une intégrale.

Indications Exercice 9. Écrire $P = AB$, évaluer en a_i. Introduire un polynôme C à partir de A et B, qui a beaucoup de racines.

Indications Exercice 11.

2. Commencer par justifier que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle. On obtient par ailleurs que toute valeur d'adhérence est un point fixe de f.

Indications Exercice 13.

1. Remarquer que $|f_n|$ est symétrique par rapport à $\frac{n}{2}$, puis supposer par l'absurde que le maximum est atteint en un point $x_n \in [2, \frac{n}{2}]$.
2. Pour l'équivalent : comparaison somme intégrale.

Indications Exercice 14. Déterminer des majorations sur les coefficients, à commencer par les diagonaux, en fonction de $\rho = \sup |a_{ii}|$ et $C = \sup |a_{ij}|$.

Indications Exercice 16.

2. Traiter le cas $r = 2$. On part d'un produit $s_1 s_2$. Si $s_1 \leqslant s_2$, c'est bon. Sinon, $s_2 < s_1$, on peut écrire $s_1 s_2 = s_2 s_2^{-1} s_1 s_2 = s_2(s_2^{-1} s_1 s_2)$: on a mis s_2 en premier !

Indications Exercice 17.

2. En minorant $\binom{2n}{n}$ par $\frac{2^{2n}}{2n+1}$, on a $B = O(\ln d)$. Partitionner le triangle de Pascal en $O(B)$ chemins strictement croissants.
3. Le 2 vient des coefficients binomiaux de la forme $\binom{d}{1}$ et $\binom{d}{d-1}$. Il s'agit de justifier que la contribution des autres est négligeable, traiter à part ceux de la forme $\binom{d}{2}$ et $\binom{d}{d-2}$, et majorer brutalement les autres.