# Interro n°1

**Exercice 1.** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner la négation formelle des propriétés suivantes.

1. $\exists K > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ \big(|x| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon\big)$

**Exercice 2.**

1. Énoncer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. On considère $I$ l'ensemble des multiples de $y$ (les nombres de la forme $ky$, pour $k \in \mathbb{Z}$) qui sont inférieurs ou égaux à $x$. On admet que l'ensemble $I$ admet un maximum, que l'on note $m$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $x = m + r$ et $0 \leqslant r < y$.

**Exercice 3.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'assertion $(P)$: $(\forall \varepsilon > 0, \ a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leqslant b$.

1. Écrire la réciproque de $(P)$. Est-elle vraie ?
2. Écrire la contraposée de $(P)$.
3. Justifier que $(P)$ est vraie.
   **Indication** : *Il s'agit d'expliciter une valeur de $\varepsilon$, en fonction de $a$ et $b$. Faire un dessin.*

**Exercice 4.**

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $d$ leur pgcd.
   (a) Énoncer le théorème de Bézout.
   (b) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $d \mid n$ si et seulement si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $n = au + bv$.
2. ★ Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x^7 \in \mathbb{Q}$ et $x^{12} \in \mathbb{Q}$, a-t-on forcément $x \in \mathbb{Q}$ ? Qu'en est-il si on suppose plutôt $x^9 \in \mathbb{Q}$ et $x^{12} \in \mathbb{Q}$ ?

**Exercice 5.** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**Exercice 6.** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que le produit $ab$ est impair si et seulement si $a$ et $b$ sont impairs.

**Exercice 7.** On considère une suite $(u_n)$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

1. On suppose dans cette question que $u_0 = 0$ et $u_1 = 2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\,2^n$.
2. Dans le cas général, on admet qu'il existe un couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = (a + nb)2^n$. Montrer que ce couple est unique.

**Exercice 8.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Donner les définitions formelles de $(u_n)$ majorée, $(u_n)$ non majorée, et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
2. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites qui tendent vers $+\infty$. Montrer que $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
   **Indication** : *Écrire l'objectif. Appliquer judicieusement les hypothèses, qui donnent l'existence de deux rangs $n_1$ et $n_2$.*

**Exercice 9.**

1. Soit $a \geqslant -1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ (1 + a)^n \geqslant 1 + na$.
2. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!], \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leqslant 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$.

**Exercice 10.** Soit $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Montrer que $x$ est irrationnel.

**Exercice 11.** Résoudre l'équation $\sqrt{6 - x} + \sqrt{3 - x} = \sqrt{x + 5} + \sqrt{4 - 3x}$.

**Exercice 12.** Déterminer une expression simple du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = 2u_n$ et $u_{2n+1} = u_n + u_{n+1}$.
**Indication** : *Il s'agit de conjecturer une expression simple, puis de la démontrer, par récurrence forte.*

**Exercice 13.** ★ Soit $G$ un graphe à $n$ sommets et $n$ arêtes. On admet que dans tout graphe connexe à $n$ sommets on peut ne conserver que $n - 1$ arêtes tout en préservant la connexité.

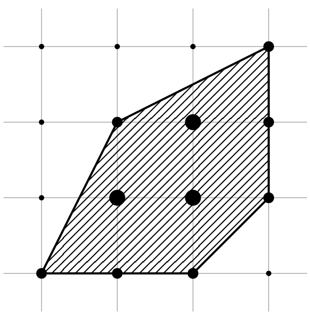
1. On suppose que $G$ est connexe. Montrer que $G$ admet un cycle.
2. Étendre ce résultat sans l'hypothèse de connexité.

**Exercice 14.** ★ On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{S}$ des entiers naturels pouvant s'écrire comme la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $2^n \notin \mathcal{S}$.
**Indication** : *Quels sont les diviseurs impairs de $2^n$ ?*

**Exercice 15.** ★ **Formule de Pick.**

On s'intéresse à des polygones nulle part aplati dont les sommets sont à coordonnées entières. Pour un tel polygone $P$, on note respectivement $I(P)$ et $B(P)$ le nombre de points entiers à l'intérieur (strictement) et sur le bord de $P$, et $\mathcal{A}(P)$ l'aire de $P$. On veut démontrer la formule de Pick :

$$\mathcal{A}(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1.$$



1. Soit $P$ un polygone et $P_1$, $P_2$ deux points entiers de son bord tels que le segment ouvert $]P_1,P_2[$ soit inclus dans l'intérieur strict de $P$. Le segment $[P_1,P_2]$ découpe le polygone $P$ en deux polygones $P_1$ et $P_2$ non aplatis. On suppose que $P_1$ vérifie la formule de Pick. Justifier brièvement que $P$ vérifie la formule de Pick si et seulement si $P_2$ la vérifie.
2. (a) Vérifier la formule de Pick pour un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. En déduire qu'elle fonctionne pour tout triangle rectangle dont les côtés autres que l'hypoténuse sont parallèles aux axes.
   (b) En déduire que la formule de Pick est valable pour tout triangle (à sommets entiers).
   **Indication** : *Chercher à compléter le triangle, en un rectangle.*
   (c) Soit $n$ un entier premier. Montrer que pour $n \geqslant i \geqslant 2$, les triangles passant par les points $(0,0)$, $(n-i,i)$, $(n-i+1,i-1)$ contiennent le même nombre de points entiers.