Interro n°2

Traiter en priorité les exercices 1 à 9.

Exercice 1. Soit $f\colon X \to Y$, $A \subset X$ et $B \subset Y$.

1. Donner la définition ensembliste de $f^{-1}(B)$ et pour $y \in Y$, compléter l'équivalence suivante par une définition formelle : $y \in f(A) \Leftrightarrow \dots$
2. Comparer pour l'inclusion $f(f^{-1}(B))$ et B. Justifier l'inclusion correcte.

Exercice 2. Soit $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$.

1. Donner les définitions formelles de f injective et f surjective.
2. Montrer que si g et f sont injectives $g \circ f$ est injective.
3. Montrer que si g et f sont surjectives $g \circ f$ est surjective.

Exercice 3. Soit $h\colon x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$.

1. Montrer que la composée de deux fonctions strictement croissantes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante.
2. Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle I à expliciter.
3. Déterminer une expression de la réciproque $h^{-1}\colon I \to \mathbb{R}_+$.

Exercice 4. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler deux définitions de $\mathbb{U}_n$.
2. Montrer que si $m \mid n$, alors $\mathbb{U}_m \subset \mathbb{U}_n$.
3. Montrer la réciproque.
4. ★ Montrer que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \{1\} \Leftrightarrow n \wedge m = 1$.
   Indication : *Pour un sens, on pourra écrire une relation de Bézout.*

Exercice 5. On considère les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f\colon n \mapsto 2n$ et $g\colon n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.
2. Justifier que g et f ne sont pas bijectives.

Exercice 6. Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble. On suppose que $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

Exercice 7. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $f \,\mathcal{R}\, g$ si et seulement s'il existe une bijection $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$.

1. Pour φ bijective, justifier l'équivalence $\varphi \circ f = g \circ \varphi \Leftrightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g$. **Indication** : *Si $f = g$, alors $f \circ h = g \circ h$.*
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 8. Soient A, B deux ensembles. On cherche les ensembles X vérifiant l'équation $(E)\colon A \cap X = B$.

1. Donner sans justification une CNS sur A et B pour que (E) admette des solutions.
2. Lorsque cette condition est vérifiée, décrire sans justifier les solutions de (E) et en donner leur nombre, en fonction de $|A|$ et $|E|$. **Indication** : *Éventuellement, se contenter de répondre dans le cas où $|A| = |E| - 1$.*

Exercice 9. Soit E un ensemble et $A \subset E$. Montrer que l'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(\overline{A}) \\ X & \mapsto & \left(X \cap A, X \cap \overline{A}\right) \end{array}$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 10. Pour $a \in \mathbb{Z}^*$, on s'intéresse à l'existence d'une fonction $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $(*)\colon \forall n,\ (f \circ f)(n) = n + a$.

1. Pour a pair, montrer qu'il existe une telle fonction.
2. Soit f vérifiant $(*)$.
   (a) Montrer que f est bijective.
   (b) ★ Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, les $f^{(n)}(x)$ sont distincts.
   Le résultat s'étend de même à $n \in \mathbb{Z}$, avec la convention $f^{(n)} = \left(f^{-1}\right)^{-n}$, pour $n \leq 0$.

   On admet que la relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \left(f^{(n_0)}(x) = y \text{ ou } f^{(n_0)}(y) = x\right)$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

   (c) ★ Décrire la forme des classes d'équivalence de $\sim$. Pour a impair, obtenir une contradiction.

Exercice 11. ★ **Cas particulier du théorème de Van der Waerden**. Un 2-coloriages d'un ensemble E est la donnée d'une application $f\colon E \to \{0, 1\}$. On peut imaginer que 0 correspond à la couleur blanche, et 1 à la noire.

1. On considère $E = [\![1, 165]\!]$, que l'on partitionne en blocs de 5 termes consécutifs $A_1, A_2, \dots$, où $A_1 = [\![1, 5]\!]$, $A_2 = [\![6, 10]\!]$, etc.
   Montrer que si l'on colorie E avec deux couleurs, il existe deux blocs A_i, A_j avec $i \neq j$ qui ont le même coloriage (un coloriage d'un bloc étant assimilé à un quintuplet $(c_1, \dots, c_5)$ de couleurs).
2. ★ En déduire que si l'on colorie $[\![1, 325]\!]$ avec deux couleurs, il existe trois entiers distincts $i, j, k \in [\![1, 325]\!]$ en progression arithmétique de la même couleur.
   On pourra noter $a_1 < a_2$ deux numéros parmi les trois premiers entiers d'un bloc ayant la même couleur, ou se contenter de traiter un cas particulier non trivial.

Exercice 12. ★ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante exhaustive de parties de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$. On suppose que pour toute partie infinie $X \subset \mathbb{N}$, il existe un n tel que $X \cap A_n$ soit infini. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $A_n = \mathbb{N}$.